

الحكومة المصرية — وزارة المعارف العمومية

مراقبة التعليم الفني

كِتَابٌ

عَلِّمْتُكَ السُّطُوحَ وَالْأَعْمَاقَ

تأليف الفرد لودج

أستاذ الرياضيات النظرية بكلية المهندسين الملكية الهندية بكوبرزهل

ترجمه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالإدارة  
مع تعديل بعض الأمثلة والتمرينات بما يلائم حالة المدارس المصرية

(حقوق الطبع محفوظة)

وقد ترجم هذا الكتاب بتصريح من الخواجات لونجان جرين وشركائه بلوندره

( الطبعة الرابعة )

المطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩٢٥







الحكومة المصرية — وزارة المعارف العمومية .

مراقبة التعليم الفني

# كِتَابٌ عَلَيْهِ تَفِيدُ السُّطُوحُ وَالْأَجْمَعُ

تأليف الفرد لودج

أستاذ الرياضيات النظرية بكافة المهندسين الملوكة الهندية بكوبرزهل

ترجمه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالإدارة  
مع تعديل بعض الأمثلة والتمرينات بما يلائم حالة المدارس المصرية

(حقوق الطبع محفوظة)

وقد ترجم هذا الكتاب بتصريح من الخواجات لولنجان جرين وشركائه بلوندره

( الطبعة الرابعة )

بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩٢٥ •



# فهرست

## کتاب علم تقدیر السطوح والأحجام

صفحة	(الأرقام المحصورة بين قوسين هي أرقام البنود)
(ك)	خطبة المؤلف ... ..
١	المقدمة (١-٢) ... ..
٣	الأبعاد (٣) ... ..
٤	تعاريف (٤-١١) ... ..
٤	السطح الاسطوانى - الاسطوانة (٤) ... ..
٥	السطح المخروطى - المخروط (٥) ... ..
٦	المخروط الناقص ... ..
٦	الكرة (٦) ... ..
٧	القطعة الكروية ... ..
٧	القطعة الكروية الناقصة - المنطقة ... ..
٧	القطاع الكروى ... ..
٨	المنشور (٧) ... ..
٩	الغلاوير (٨) ... ..
٩	المنشور الناقص (٩) ... ..
١٠	متوازى السطوح - المكعب (١٠) ... ..
١١	المهرم (١١) ... ..
١١	المهرم الناقص ... ..
١٢	انفصل الأول - الأشكال المستوية ... ..
١٢	مساحة المثلث (١٢) ... ..
١٢	مساحة متوازى الاضلاع (١٣) ... ..
١٢	مساحة المثلث (١٤-١٥) ... ..
١٧	مساحة شبه المثلث (١٦) ... ..
١٨	مساحة كثير الاضلاع (١٧) ... ..

صفحة

١٩	تمرينات - ١ -
٢٤	طول القوس الدائري (١٨ - ٢٣)
٢٥	معادلات تربط $\sin$ و $\cos$ (١٩)
٢٦	المقادير التقريبية لطول قوس دائري (٢٠ - ٢٣)
٣٦	تمرينات - ٢ -
٣٩	مساحة القطاع الدائري (٢٤)
٤٠	مساحة القطعة الدائرية (٢٥ - ٣٠)
٤١	قوانين تقريبية لمساحة قطعة دائرية (٢٦ - ٢٩)
٤٨	مساحة القطعة الأكبر من نصف دائرة (٣٠)
٤٩	الحق الايدرويكى المتوسط (٣١ - ٣٢)
٥٠	قانون تقريبي لتحمين نصف القطر الايدرويكى (٣٢)
٥١	تمرينات - ٣ -
٥٦	مقاسات الأراضي
٥٦	١ - مساح المضلعات (٣٢ - ٣٦)
٦١	كيفية ايجاد مساحة أى شكل (٣٦)
٦٧	تمرينات - ٤ -
٦٩	٢ - المساح المحددة بخطوط منحنية (٣٧ - ٣٩)
٦٩	حساب المساحة بطريقة ممسبون (٣٨)
٧١	حساب المساحة بطريقة الرأسيات الواقعة في الوسط أو طريقة أشباه المنحرف (٣٩)
٧٢	تمرينات - ٥ -
٧٢	المنحنيات البيانية
٧٢	تعديل طريقة ممسبون بواسطة المساحات (٤٠)
٧٤	طريقة الثلثين (٤١ - ٤٣)
٧٦	طرق الزم البياني (٤٤ - ٤٥)
٨١	طريقة الرأسيات الواقعة في الوسط (٤٦)
٨٣	البلايتمتر (٤٧)
٨٤	تمرينات - ٦ -



صفحة

٨٥	... .. الفصل الثاني - سطوح الأجسام
٨٥	... .. تمهيد (٤٨)
٨٥	... .. السطح المنحنى للأسطوانة (٤٩)
٨٦	... .. السطح المنحنى لمخروط دائري قائم (٥٠-٥١)
٨٨	... .. السطح المنحنى لمخروط دائري ناقص (٥٢)
٨٩	... .. السطح المنحنى للكرة (٥٣)
٩٠	... .. سطح القطعة الكروية (٥٤-٥٥)
٩٢	... .. سطح القطعة الكروية الناقصة (٥٦-٥٨)
٩٤	... .. المقياس الكروي (٥٩)
٩٥	... .. تمارينات - ٧ -
٩٧	... .. سطح الجسم الحلقى وما يرتبط به من المسائل (٦٠-٦٥)
١٠١	... .. تمارينات - ٨ -
١٠٢	... .. الفصل الثالث - الشقوق والمطلبات وكثيرات السطوح الكروية
١٠٢	... .. تعاريف (٦٦)
١٠٣	... .. مساحة الشقة الكروية (٦٧-٦٨)
١٠٤	... .. مساحة المثلث الكروي (٦٩)
١٠٦	... .. مساحة المثلث الكروي المتساوى الأضلاع (٧٠)
١٠٨	... .. تمارينات - ٩ -
١٠٩	... .. مساحة المضلع الكروي (٧١-٧٢)
١١٢	... .. تمارينات - ١٠ -
١١٣	... .. مساحة المضلع الكروي المتساوى الأضلاع (٧٣)
١١٤	... .. مساحة المضلع الشبكي المنتظم المرسوم على كرة (٧٤-٧٩)
١٢٠	... .. مساحة الخمسة الكثيرات السطوح المنتظمة الكروية (٧٦)
١٢٧	... .. تمارينات - ١١ -
١٢٩	... .. الفصل الرابع - كثيرات الأوجه المستوية المنتظمة
١٢٩	... .. الأجسام الخمسة المنتظمة (٨٠)
١٣٠	... .. الخواص المتعاكسة (٨١)

صحيفة

١٣٣	... .. سطح كثير الأوجه المنتظم (٨٢)
١٣٤	... .. حجم كثير الأوجه المنتظم (٨٣)
١٣٥	... .. نصف قطري الكرتين المرسومين داخلا وخارجا (٨٤-٨٧)
١٣٧	... .. الارباطات بين ذى الأربعة الأوجه وذى الثمانية الأوجه (٨٨)
١٣٨	... .. تمرينات - ١٢ -
١٤٠	... .. الفصل الخامس - أجام الأجسام
١٤٠	... .. القانون المنشورى أو قانون سميون (٨٩-٩٠)
١٤٠	... .. الحالة التى فيها يكون القطاع المتوسط هو القطاع الواقع فى الوسط (٩١)
١٤١	... .. القطاعات الواقعة فى الوسط (٩٢-٩٦)
١٤١	... .. المخروط الناقص القائم الدائرى (٩٢)
١٤٣	... .. الهرم الناقص (٩٥)
١٤٤	... .. تمرينات - ١٣ -
١٤٤	... .. القطعة الكروية الناقصة (٩٧-١٠٠)
١٤٧	... .. القطعة الكروية (١٠١-١٠٢)
١٤٩	... .. تمرينات - ١٤ -
١٥١	... .. المنشور الناقص (١٠٣)
١٥١	... .. تمرينات - ١٥ -
١٥٣	... .. القطاعات المتوسطة والأجام (١٠٤-١١٠)
١٥٥	... .. المخروط الناقص (١٠٦)
١٥٦	... .. القطعة الكروية الناقصة (١٠٧)
١٥٧	... .. الحجم المكافئ (١٠٨)
١٥٨	... .. المنشور الناقص (١٠٩)
١٥٩	... .. قانون حجم الخابور (١١٠)
١٦٠	... .. تحقيق أثر لقانون القطعة الكروية الناقصة والمخروط الناقص (١١١-١١٤)
١٦٣	... .. تمرينات - ١٦ -
١٧١	... .. الجوف الكرى (١١٥)
١٧٢	... .. الكرة المحبوة (١١٦-١١٧)

١٧٣	... ..	القطاع الكروي (١١٨)
١٧٤	... ..	تمرينات - ١٧ -
١٧٦	... ..	الاسطوانة المسائلة (١١٩)
١٧٧	... ..	الجسم الخلقى (١٢٠)
١٧٩	... ..	تمرينات - ١٨ -
١٨٠	... ..	نظريات ومسائل متعلقة بالجسم الخلقى (١٢١-١٢٤)
١٨٢	... ..	تمرينات - ١٩ -
١٨٣	... ..	الأجسام المتشابهة (١٢٥)
١٨٥	... ..	تمرينات - ٢٠ -
١٨٧	... ..	الفصل السادس - التقدير التقريبي للأجسام
١٨٧	... ..	بطريقة ميمسون (١٢٦ - ١٢٧)
١٨٨	... ..	القوانين الخاصة بالقطاع الواقع في الوسط والقطاعين المتطرفين حينما تكون القطاعات متساوية التباعد (١٢٨-١٣٢)
١٩٣	... ..	غير متساوية التباعد (١٢٣-١٣٥)
٢٠٠	... ..	المتوسط الحسابى لقطاعات مخصوصة (١٣٦)
٢٠١	... ..	تمرينات - ٢١ -
٢٠٦	... ..	طرق عمومية لإيجاد القطاع العرضى المتوسط من عدة قطاعات عرضية متوازية متساوية التباعد (١٣٧-١٤٧)
٢٠٦	... ..	قانون ميمسون (١٣٧)
٢٠٧	... ..	قانون ديك (١٣٨)
٢١٢	... ..	تمرينات - ٢٢ -
٢١٨	... ..	تمرينات - ٢٣ -
٢٢٠	... ..	الفصل السابع - تقدير الحفر والردم
٢٢٠	... ..	أولاً - مساح القطاعات (١٤٨-١٥٤)
٢٢١	... ..	مساحة القطاع العرضى حينما تكون الأرض أفقية عرضياً (١٤٩)
٢٢٢	... ..	المساحة بدلالة الارتفاع المكبر ونصف عرض القطاع (١٥٠)

صحيفة

- ٢٢٤ القوانين الخاصة بالحالة التي فيها الضلع المائل للأرض غير قاطع للقاعدة (١٥٢)
- ٢٣٠ القوانين الخاصة بالحالة التي فيها الضلع المائل للأرض قاطع للقاعدة (١٥٣) ...
- ٢٣١ خلاصة القوانين الخاصة بقطاع الحفر والردم (١٥٤) ... ..
- ٢٣٣ تمرينات - ٢٤ - ... ..
- ٢٣٦ ثانيا - حجم الحفر والردم (١٥٥ - ١٦٧) ... ..
- القطاع العرضي المتوسط وحجم الحفر والردم اذا كان ضلع الأرض غير قاطع للقاعدة
- (١٥٥ - ١٦٣) ... ..
- ٢٣٦ الطريقة الأولى لتعيين الحجم - الطريقة المنشورية (١٥٥ - ١٦١) ... ..
- ٢٤٨ الطريقة الثانية أو طريقة الافق المكافئ في حالة ميل الأرض (١٦٢) ... ..
- ٢٥١ الطريقة الثالثة في حالة ميل الأرض (١٦٣) ... ..
- ٢٥٣ خلاصة القوانين في حالة ميل الأرض (١٦٤) ... ..
- ٢٥٧ ايجاد تأثير الانحناء على حجم الحفر (١٦٧) ... ..
- ٢٦١ تمرينات - ٢٥ - ... ..
- ٢٦٥ الفصل الثامن - حل المسائل بواسطة اللوغاريتمات وقواعد مختصرة في الحسابات اللوغاريتمية
- ٢٦٥ تمهيدات (١٦٨ - ١٦٩) ... ..
- ٢٦٦ بيان القواعد الخاصة باللوغاريتمات بالاختصار (١٧٠ - ١٧١) ... ..
- ٢٦٩ قسمة اللوغاريتم ذي العدد اليافى السالب (١٧١) ... ..
- ٢٧٠ تمرينات - ٢٦ - ... ..
- ٢٧٢ حل المسائل اذا علمت أضلاعه (١٧٢) ... ..
- ٢٧٦ حل المسائل اذا علم أحد أضلاعه والزوايا المجاورتان له (١٧٣) ... ..
- حل المسائل اذا علم ضلعان من أضلاعه والزوايا المقابلة لأحدهما والحالتان المتنبئة
- وغير المتنبئة (١٧٤) ... ..
- ٢٨٤ حل المسائل اذا علم ضلعان من أضلاعه والزوايا المحصورة بينهما (١٧٥) ... ..
- ٢٨٨ التحم اللوغاريتمى (١٧٦) ... ..
- ٢٩٠ تمرينات - ٢٧ - ... ..
- ٢٩١ الفصل التاسع - ملحوظات حسابية
- ٢٩١ الملحق (١٧٧) ... ..

صفحة	
الضرب (١٧٨)	٢٩٣
الضرب المختصر (١٧٩)	٢٩٥
القسم الطويلة (١٨٠ - ١٨١)	٢٩٦
الضرب في النسبة التقريرية ط (١٨٢)	٢٩٩
القسم على ط (١٨٣)	٣٠١
الضرب في ط <sup>٢</sup> (١٨٤)	٣٠٢
القسم على ط <sup>٢</sup> (١٨٥)	٣٠٢
تحويل الدرج الى التقدير الدائري (١٨٦)	٣٠٣
تحويل التقدير الدائري الى درج (١٨٧)	٣٠٥
تمرينات - ٢٨ -	٣٠٦
الفصل العاشر - المقاييس الانكليزية والمقاييس المترية	٣٠٨
تمهيد ١٨٨	٣٠٨
طرق تحويل المقاييس من انكليزية الى مترية وبالعكس مع تحقيق النتائج (١٨٩ - ١٩٠)	٣٠٩
توضيح الجدول (١٩١)	٣١٢
جدول المقاييس المترية للأطوال	٣١٤
» » » للسطوح	٣١٥
» » » للأحجام	٣١٦
» » » للأوزان	٣١٨
الارتباطات بين ثقل الماء وجمعه	٣١٩
تمرينات - ٢٩ -	٣٢٠
إيجاد عدد جالونات الماء في وعاء اسطوانى وثقل ذلك الماء فيه (١٩٢)	٣٢٣
جدول الأمتثال - (١٩٣)	٣٢٥
تمرينات - ٣٠ -	٣٢٦
مسائل مختلفة	٣٣٠



## خطبة المؤلف

ان هذا الكتاب قد أعد للطلبة الراقيين الذين يريدون تحصيل معلومات نظرية كافية في موضوع تقدير السطوح والأحجام عمليا وقد فرضنا أن الطالب على علم ببعض قواعد هذا الفن وانه في بعض الفصول عالم بعلم حساب المثلثات الى حل المثلثات

وقد اعتنى بقانون سمپسون ذى الأهمية العظمى في تقدير حجم الأجسام اعتناء عظيما واستنتجت قوانين الأحجام لجميع الأجسام البسيطة من هذا القانون وحده وبذلك اشتركت جميع القوانين في اعتبارها كأحوال خاصة من هذا القانون الأساسى

ومع أن قانون سمپسون كثير الاستعمال في جميع الأعمال الهندسية اقتصرنا معظم كتب هذا الفن على ايراد كلمات قليلة في هذا القانون وخلا بعضها من ذكره بالمرّة

ولهذا القانون نفع عظيم في تقدير مساح السطوح المستوية فانه في الحقيقة يعطى طريقة للتقدير التقريبي لأى دالة تكاملية من التى بالصورة  
تكا ص فا ص

اذا علم عدد كاف من مقادير ص المقابلة لمقادير س المتزايدة بكميات متساوية بين حدى التكامل المعلومين ويشارك مع هذا القانون في فضل مزاياه العملية قانون ويل وقوانين أخرى وضعت لغرض الحصول على أضبط متوسط لمقادير ص المستنتجة من المعاليم وقد سطرنا هذه القوانين في آخر الفصل الخاص بالتقدير التقريبي للأحجام ويمكن أن يستغنى عنها قارئ هذا الكتاب في المرة الأولى لقراءته حيث ان قانون سمپسون كاف تماما في معظم الأعمال \*

وهناك أمر آخر ينبغى الاعتناء به وهو أهمية امتحان القوانين المختلفة وفحصها بتطبيقها على أحوال مختلفة بسيطة فالملكة التى تكتسب تدريجاً بهذه الطريقة لضبط القوانين وتصحيح الخطأ الذى فيها هى أمر ثمين جليل الفائدة فى جميع الفروع الرياضية

ويشتمل الكتاب على كثير من التمرينات الرقمية والجبرية وفى أواخر الكتاب بعض قواعد متعلقة باختصار الأعمال فى الحسابات اللوغاريتمية وغيرها والغرض من ذلك إنما هو الإعانة على المقصود من الكتاب فقط والفصل التاسع الخاص بالمحفوظات الحسابية يشتمل على طرق تساعد على إجراء الأعمال الحسابية بسرعة ولذا ينبغى أن يبدأ بقراءته

والغرض المهم من الأمثلة الجبرية إنما هو التمرين على النظريات فإذا وجد بعض الطلاب صعوبة فيها ينبغى تركها فى القراءة الأولى والعود إليها ثانية حينما تزول معظم هذه الصعوبات

وفى الختام نستلفت الطلبة الى أنه من المهم أن يتمرنوا على أن يقيسوا بأنفسهم المقاييس الضرورية لتقدير بعض ما يحتاج الى تقديره عملاً فان ذلك يحى فى نفوسهم قواعد الفن وحقائقه ويساعد على سرعة رسوخ قوانينه فى أذهانهم ما



## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد  
وعلى آله وصحبه أجمعين

### مقدمة

١ - سنفرض فيما سيأتى أن الطالب على علم ببعض مبادئ علم تقدير  
السطوح والاحجام فشلا نفرض أنه يعلم أن مساحة المستطيل هي حاصل  
ضرب طوله في عرضه وأن مساحة الدائرة =  $\pi r^2$  ط  $r$  هو طول  
نصف القطر  $r$  ط هو مقدار نسبة المحيط الى القطر ومقدارها الرقى يساوى  
 $\frac{1}{\pi}$  تقريبا أو ٣,١٤١٦ بتقريب أدق وإن حجم الاسطوانة أو المنشور هو  
حاصل ضرب الارتفاع في مساحة القطاع العرضى  
ونبحث في الفصل الخامس من الكتاب في أحجام الاجسام والقوانين الخاصة  
بذلك يمكن أن تستنتج في جميع الأحوال البسيطة من قانون مهم جدا  
معروف بالقانون المنشورى والغالب أن يكون كل جسم من الاجسام التى  
يشتغل بها محدودا بمستويين متوازيين والمسافة بينهما تسمى ارتفاع الجسم  
والقانون المنشورى يهذى الى طريقة بسيطة لتحين القطاع العرضى لأسطوانة  
ارتفاعها مساوى لارتفاع الجسم المفروض فيكون حجمها كحجم ذلك الجسم  
وهذا القطاع العرضى يسمى القطاع العرضى المتوسط للجسم والحجم هو حاصل  
ضرب ارتفاع الجسم في هذا القطاع المتوسط والقانون نفسه يتعلق بطرق  
خارجة عن مباحث هذا الكتاب ولذا نسلم بها مبدئيا الا أن انطباقها على  
الاجسام المختلفة سيبرهن عليه فيما بعد وفي آخر الفصل نبحث في بعض الاجسام  
الدورانية أما الفصل السادس فهو خاص بالبحث في التقدير التقريبي لاجسام  
الاجسام غير المنتظمة

ثم اننا سنبحث في بعض أجسام خاصة وذلك في الفصول المتعلقة بالأجسام الكثيرة السطوح وفي حساب الحفر والردم

أما الفصول الباقية من الكتاب فنبعث في سطوح الأجسام المختلفة وفي أضلاع الأشكال المستوية ومسائحتها وفي الفصول الأخيرة يفرض أن الطالب على المام نوما بعلم حساب المثلثات لغاية حل المثلثات

وفي أواخر الكتاب فصل متعلق بطرق حسابية رقمية قد تكون ذات فائدة في اختصار العمل في كثير من الأحوال وهذا الفصل يمكن أن يرجع اليه في أي وقت والفصل الذي يلي ذلك يبحث في الطرق الحسابية الخاصة بالمسائل المتعلقة بالموازين والمقاييس الانكليزية والمترية وقد وضعت هذه الفصول في آخر الكتاب لأن معظمها إنما هو للمساعدة على المواضيع الأصلية من الكتاب

وفي جميع الفصول الأولى من الكتاب قد بينا للطالب كيفية تجربة أي قانون متشعب بتطبيقه على بعض أحوال خاصة بسيطة وفي بعض الاحيان قد أورينا أيضا كيفية استنباط القانون بهذه الطريقة فاذا كان الطلبة دائما على استعداد لتجربة قانون ليسوا متحققين من ضبطه وذلك بتطبيقه على أحوال خاصة فانهم يكتسبون سريعا ملكة ثابتة في عملهم لا يكون من السهل فقدها وفضلا عن ذلك فان هذه الطريقة يتكون بها بالتدرج ملكة تمنعهم من الخطأ وتقودهم الى سرعة الاستنتاج والضبط في حل المسائل ولا يقتصر ذلك على مسائل تقدير السطوح والأجسام فقط بل يكون في أي موضوع رياضي

٢ - ويجب أن يلاحظ الطالب على الأخص في كل أعماله أن جميع المسامح تحصل بضرب طولين وأن هذين الطولين يكونان على الدوام على زاوية قائمة في الشكل فمثلا مساحة المستطيل الذي ضلعا  $a$  و  $b$  يساوي  $a \times b$  ولكن مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعا  $a$  و  $b$  ليست  $a \times b$  بل  $a \times b \times \sin \theta$  جا هـ

وذلك اذا كانت هـ هي الزاوية الواقعة بين الضلعين فاذا رسم الشكل فانه يرى ان ب ج ا هـ هو البعد العمودى بين الضلعين اللذين مقدار كل منهما ١ وان المساحة هي حاصل ضرب الطولين المتعامدين ١ ٦ ب ج ا هـ ومثل ذلك في المسامح الأخرى

ثم ان حجم أى جسم محدود بمستويين متوازيين هو حاصل ضرب مساحة القطاع المتوسط الموازى للمستويين في المسافة بينهما العمودية عليهما ويجب أن يكون القطاع المتوسط والطول اللذان حاصل ضربهما يعطى الحجم عمودين على بعضهما

### ٣ - الأبعاد

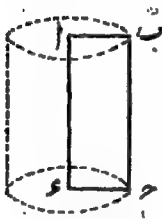
الكية المتحصلة من ضرب طولين يقال لها ذات بعدين طوليين أو بالاختصار ذات بعدين والكية المتحصلة بضرب ثلاثة أطوال يقال لها ذات ثلاثة أبعاد واذن فالسطح ذو بعدين والحجم ذو ثلاثة أبعاد والكيات غير المتحدة في عدد الأبعاد لا يمكن أن تجمع احداها على الأخرى ولا تطرح منها ولا أن تتساوى ببعضها أى ان جميع الكيات التى تدخل في معادلة يجب أن تكون متحدة في عدد أبعادها فمثلا لا يمكن أن نجعل مسطحا وطولا أو حجما بعضها الى بعض لأن الناتج بهذه الكيفية يكون مديم المعنى والالتفات الى هذا الأمر الواضح يقى من الغلط غالباً ويرشد الى تصحيح الغلط حالا لو وقع

## تعريف

### ٤ - السطح الأسطوانى - الاسطوانة

السطح الاسطوانى هو السطح الذى يتكوّن من خط مستقيم يتحرك موازيا لنفسه حول محيط أى منحن يسمى منحنى الدليل والخط المتحرك يسمى الرأس والجسم المحّد بهذا السطح يسمى اسطوانة فاذا كان منحنى الدليل دائرة وكان الخط المتحرك عموديا على مستوى دائرة الدليل فالأسطوانة المتولدة تسمى أسطوانة دائرية والخط الماز بمركز الدائرة موازيا للرأس يسمى محور الاسطوانة

والجزء من أسطوانة دائرية المحّد بمستويين عموديين على المحور يسمى اسطوانة قائمة دائرية واذا ذكر لفظ الاسطوانة



فى هذا الكتاب فالمراد الاسطوانة الدائرية القائمة الا اذا نص على غير ذلك والبعد بين المستويين يسمى ارتفاع الاسطوانة

ويمكن أن تتولد الاسطوانة الدائرية القائمة بتحرك دائرة بالتوازي لنفسها بحيث يكون مركزها على خط مستقيم عمودى على مستويها

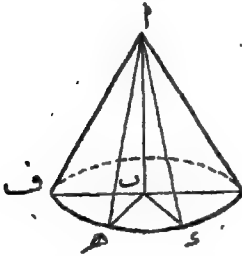
ويمكن أيضا ان تتكوّن بدوران مستطيل حول أحد أضلاعه واذا فيمكن تعريفها بأنها الجسم المتكوّن باحدى تلك الطرق

ومن الواضح أن جميع مقاطعات الاسطوانة الدائرية القائمة العمودية على محورها هى دوائر متساوية

## ٥ - السطح المخروطى - المخروط

السطح المخروطى هو السطح الذى يتكوّن من خط مستقيم يمر بنقطة ثابتة ويتحرك حول محيط أى "منحن" يسمى منحنى الدليل والخط المتحرك يسمى الرأس والنقطة الثابتة تسمى الرأس

والجسم المحصور فى هذا السطح يسمى مخروط  
وإذا كان منحنى الدليل دائرة وكانت الرأس على محور الدائرة (أى على الخط  
المرسوم من مركزها عموديا على مستويها) فإن المخروط يسمى مخروطا دائريا ومحور  
الدائرة يسمى محور المخروط الدائرى

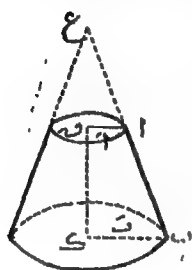


وحز المخروط الدائرى المحصور بين  
الرأس وأى مستو عمودى على المحور  
يسمى مخروطا دائريا قائما وإذا ذكر  
المخروط فى هذا الكتاب فالمقصود  
المخروط الدائرى القائم إلا إذا ذكر  
العكس والبعء بين الرأس والمستوى  
المكوّن للقاعدة يسمى ارتفاع المخروط

ويمكن أن يتكوّن المخروط الدائرى القائم بدوران مثلث قائم الزاوية حول  
أحد ضلعي الزاوية القائمة فمثلا المخروط المبين بالشكل يمكن أن يتولد بدوران  
المثلث أ ب ح حول أ ب

ومن الواضح أن جميع مقاطعات المخروط القائم الدائرى العمودية على محوره هى دوائر  
وطول الضلع أ ب الذى يدور حوله المثلث القائم الزاوية يساوى ارتفاع  
المخروط وطول أى وتر (أ ب ح ٦ ٤ ٦ فى الشكل) يسمى رأس المخروط

والزاوية ب م ح الواقعة بين هذين الخطين تسمى نصف زاوية رأس المخروط  
والضلع الثالث للثلث هو نصف قطر الدائرة المكوّنة لقاعدة المخروط



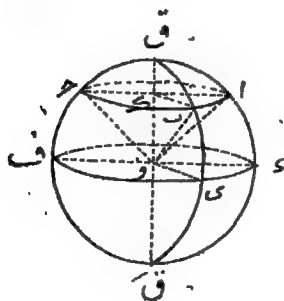
المخروط الناقص — جزء المخروط المقطوع  
بمستويين متوازيين في جهة واحدة من الرأس  
يسمى مخروطاً ناقصاً

والبعد بين المستويين يسمى ارتفاع المخروط الناقص وفي هذا الكتاب يطلق اسم مخروط ناقص على المخروط الناقص الدائري القائم المقطوع بمستويين عموديين على المحور

## ٦ - الزكاة

الجم المحصور في سطح جميع نقطة على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة يسمى كرة والنقطة الثابتة تسمى مركز الكرة والبعد بين المركز والسطح يسمى نصف قطر الكرة

ومن الواضح أنه يمكن تولد الكرة بدوران نصف دائرة حول القطر  
ومن الواضح أيضاً أن قطاع الكرة بأى مستو هو دائرة فاذا مر المستوى بمركز



الكرة فالقطاع يسمى دائرة عظيمة  
من الكرة والا فيسمى دائرة صغيرة  
ومن البديهي أن نصف قطر أى  
دائرة عظيمة في كرة يساوى نصف  
قطر الكرة ففي الشكل ١ و ٢ و ٣  
و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ ف أجزاء من  
دائرة عظيمة ولكن ١ ب ح هي  
دائرة صغيرة

القطعة الكروية — ان الأجزاء التي تنقسم اليها الكرة بأى مستوي تسمى قطعة كروية فاذا كان الجزان غير متساويين فالصغرى تسمى بالقطعة الصغرى والأخرى تسمى القطعة الكبرى واذا كان الجزان متساويين فكل واحدة تسمى نصف كرة والقطاع الناشئ عن المستوى القاطع يسمى قاعدة كل من القطعتين وأكبر سمك للقطعة فى اتجاه عمودى على قاعدتها يسمى ارتفاع القطعة وعلى ذلك تكون القطعة  $١$  ب ح قطعة صغرى  $٦$  و ك ارتفاعها  $٦$  ا ب ح قاعدتها  $٦$  و ا ب ح هى القطعة الكبرى  $٦$  و ك ارتفاعها  $٦$  ا ب ح قاعدتها

### القطعة الكروية الناقصة — المنطقة

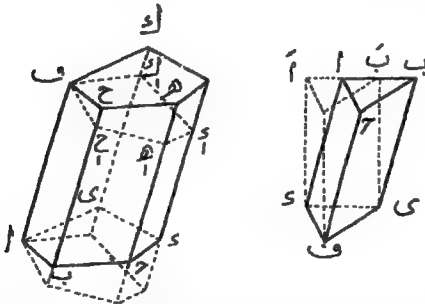
جزء الكرة المحصور بين مستويين متوازيين قاطعين لها يسمى قطعة كروية ناقصة والبعد بين المستويين يسمى ارتفاع القطعة الناقصة فاذا اشتملت القطعة على مركز الكرة فتسمى قطعة عظمى والا فتسمى قطعة صغرى وأكبر قطاع لقطعة كروية ناقصة عظمى بمستوى مواز لقاعدتها هو دائرة عظيمة للكرة وأكبر قطاع لقطعة كروية ناقصة صغرى هو احدى قاعدتيها وقد تسمى القطعة الكروية الناقصة منطقة الا أن العادة أن يخصص هذا الاسم بالسطح المنحنى للقطعة الكروية الناقصة وهذا هو الذى سيتبع فى هذا الكتاب

القطاع الكروى — الجسم المحصور بين سطح الكرة وسطح المخروط الدائرى الذى رأسه مركز الكرة يسمى قطاعا كرويا ويتكون من مخروط قائم دائرى رأسه نصف قطر الكرة وقطعة كروية متحدة القاعدة مع المخروط وفى الشكل يتكون القطاع الكروى من المخروط و  $١$  ب ح والقطعة  $١$  ب ح والجزء الباقى من الكرة يكون أيضا قطاعا كرويا والقطاعان اللذان أحدهما أصغر من نصف الكرة والاخر أكبر منه يتميزان عن بعضهما باسمى أصغر وأكبر على التناظر

## ٧ - المنشور

المنشور هو جسم متولد من حركة خط مستقيم ذى طول محدود بالتوازي لنفسه بحيث تمر إحدى نهايتيه بحيط شكل مستو كثير الأضلاع معلوم وبذلك ترسم النهاية الأخرى شكلا مضلعا آخر مساويا للأول ومشابهة له فى مستو مواز لمستوى المضلع الأول ويحده المنشور حينئذ بمضلعين متساويين متوازيين متصلين ببعضهما بمتوازيات أضلاع عددها كعدد أضلاع كل مضلع وطول الخط المتحرك يسمى طول المنشور

وهى كانت هذه المتوازيات الأضلاع عمودية على مستويي المضلعين (وفى هذه الحالة تكون متوازيات الأضلاع هذه بالضرورة مستطيلات) فالمنشور يسمى منشورا قائما وفى جميع الأحوال الأخرى يسمى منشورا مائلا وفى الشكلين الآتيين الأجسام المحددة بخطوط غليظة منشورات مائلة والمبينة بخطوط منقطة منشورات قائمة



ويرى أن المنشور هو حالة خاصة من الأسطوانة حسب تعريفها العام فمنحنى الدليل هو الشكل الكثير الأضلاع والقاعدتان مستويان متوازيان



والمسافة بين المستويين تسمى ارتفاع المنشور ومتى كان المنشور قائما فهذه المسافة تساوى طوله الا أنها ليست كذلك فى الأحوال الأخرى  
وإذا كان المضلع الدليل مثلثا فالمنشور يسمى منشورا ثلاثيا وإذا كان رباعيا يسمى المنشور رباعيا وإذا كان خماسيا يسمى المنشور خماسيا وهكذا

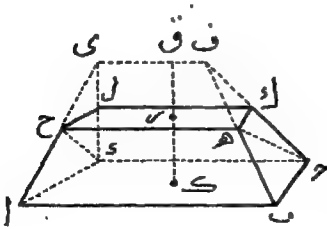
٨ - الخابور

إذا أخذ منشور ثلاثى غير محدود الطول وقطع بمستويين عرضيين غير متوازيين فهذه القطعة المحصورة تسمى خابورا والأضلاع الثلاثة المتوازية تسمى أحيانا أضلاع الخابور أما السطح المستوى الشامل لاثنتين منهما فيسمى قاعدة الخابور والثالث يسمى ضلع الخابور وبعد قاعدة الخابور عن ضلعه الآخر يسمى ارتفاع الخابور وفى الشكل الآتى فى البند التالى يكون الجسم الذى ضلعه  $ع$  ف وقاعدته  $ا ب ح د$  هو الخابور وارتفاع الخابور هو  $ك$  والشكل نفسه يشتمل على ثلاثة أو أربعة خواير أخرى

#### ٩ - المنشور الناقص

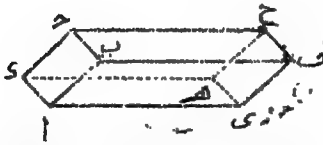
قطعة الخابور المحصورة بين قاعدة الخابور ومستو مواز لتلك القاعدة تسمى منشورا ناقصا فى الشكل يكون الجسم المحصور بين  $ا ب ح د$  و  $ك$   $ج ه$   $ل$  منشورا ناقصا ارتفاعه  $ك$  أى المسافة بين المستويين المتوازيين

وهناك أجسام أخرى أكثر تركيبا تدخل تحت اسم المنشور الناقص الذى هو الاسم العام للأجسام التى ينطبق عليها



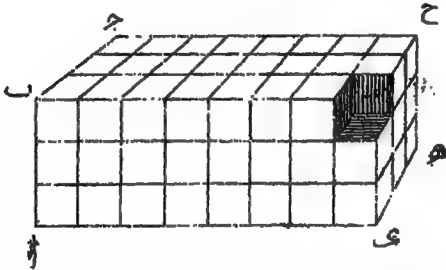
قانون المنشور والمحصورة بين مضلعين متوازيين (أنظر دائرة المعارف الانجليزية طبعة تاسعة في موضوع تقدير السطوح والأجسام)

### ١٠ - متوازي السطوح - المكعب



إذا كانت أوجه المنشور متوازيات أضلاع فإنه يسمى متوازي السطوح وإذا كانت مستطيلات وعمودية على

أضلاع المنشور فيسمى متوازي سطوح قائما أو منشورا قائما وفي هذه الحالة تكون جميع الأوجه مستطيلات



ثم إذا كانت الأوجه متساوية وهي الحالة التي يكون فيها جميع الأوجه مربعات متساوية فيسمى مكعبا

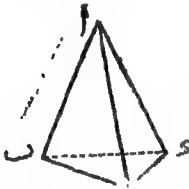
فالمكعب الذي مقياس كل ضلع من أضلاعه سنتيمتر يسمى سنتيمترا مكعبا والذي ضلعه متر يسمى مترا مكعبا وهكذا

وهذه المكعبات تسمى وحدة المكعبات وكل الأجسام تقاس أحجامها بدلالة وحدة أو أكثر من هذه الوحدات

والشكل الأخير بين متوازي سطوح قائما مكونا من مكعبات أحدها محذوف ومنه يتضح أن عدد المكعبات المكونة للجم متوازي السطوح يتحصل بضرب الأعداد المشتتم عليها كل من طوله وعرضه وارتفاعه بعضها في بعض فإذا كان كل مكعب عبارة عن متر مكعب فالجم يكون  $٧٢ = ٣ \times ٣ \times ٨$  مترا مكعبا

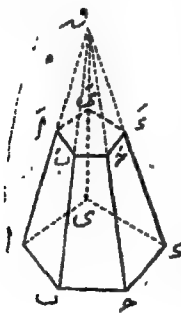
### ١١ - الهرم

الهرم هو جسم قاعدته كثير أضلاع وأوجهه مثلثات مكونة برسم خطوط واصله من زوايا القاعدة الى أى نقطة ليست في مستويها واذن فهو حالة خاصة من المخروط كما في تعريفه العام ثم ان المخروط هو أيضا حالة خاصة من الهرم وذلك لأننا اذا جعلنا عدد أضلاع مضلع القاعدة كبيرا كبيرا كافيا بحيث يكون كل ضلع صغيرا جدا فانه يكاد ينطبق على شكل أى منحنى مستو



فإذا كانت القاعدة مثلثا فالهرم يسمى ثلاثيا وإذا

كانت القاعدة شكلا رباعيا أو خماسيا فالهرم يسمى رباعيا أو خماسيا وهكذا



والرأس المشترك للأوجه الثلاثية يسمى رأس الهرم والبعدين الرأس والقاعدة يسمى ارتفاع الهرم وفي حالة الهرم الثلاثي يمكن أن يطلق اسم القاعدة على أى وجه والنقطة المقابلة لها تسمى حينئذ رأسا

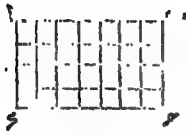
الهرم الناقص - جزء الهرم المحصور بين القاعدة

ومستو مواز لها يسمى هرما ناقصا

ومن الواضح أن قاعدتي الهرم الناقص شكلان متشابهان وإن كل قطاع مواز للقاعدتين يكون متشابههما

## الفصل الأول

### الأشكال المستوية



#### ١٢ - مساحة المستطيل

مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب طوله في عرضه وهذه هي القاعدة الأساسية في حساب جميع المساح

مثال - اذا كان مستطيل طوله ٧ أمتار وعرضه ٤ أمتار فمساحته  $7 \times 4$  بالأمطار المربعة واذا قدرت تقديرا جبريا فالمساحة  $7 \times 4$  أمتار  $28 = 28$  (مترا)  $28$  مترا مربعا

#### ١٣ - مساحة متوازي الأضلاع

مساحة متوازي الأضلاع تساوى مساحة المستطيل المتحد معه في القاعدة والارتفاع واذن فهي تساوى حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع



ومن هنا يتبع مباشرة أن مساحة متوازي الأضلاع تساوى حاصل ضرب ضلعين متجاورين  $\times$  جيب الزاوية الواقعة بينهما

#### ١٤ - مساحة المثلث

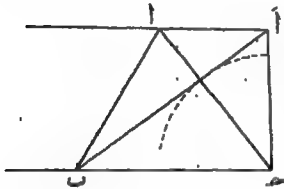
مساحة المثلث تساوى نصف مساحة متوازي الأضلاع المتحد معه في القاعدة والارتفاع واذن فهي تساوى نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع



وحيث يمكن تقرير النتيجة كما يأتي ان العرض المتوسط لثلث الموازي لقاعدته هو نصف مقدار القاعدة

وهذا مطابق للحالة المخصوصة للقانون المنشورى الموضح فى بند ٩١ وذلك لأن العرض الذى فى الوسط هو نصف القاعدة أيضا وهو أيضا المتوسط الحسابى بين القاعدة وبين الصفر الذى هو العرض عند الرأس

ولأجل تعيين مساحة مثلث بمعرفة مقياس قاعدته وارتفاعه يكون من الموافق غالبا تعويضه بمثلث مكافئ له ذى قاعدة وارتفاع مناسبين لتسهيل الحساب مثلا لأجل تعيين مساحة المثلث  $ABC$  ترسم دائرة مركزها  $C$  ونصف قطرها  $2$  سنتيمتر ويرسم خط  $AB$  مماسا للدائرة ويرسم الخط  $AA'$  موازاً للخط  $BC$  فطول الخط  $AA'$



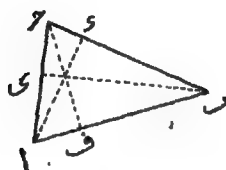
بالسنتيمتر الطولى يساوى مساحة المثلث بالسنتيمتر المربع لأن مساحة المثلث  $ABC$  مساوية لمساحة المثلث المعلوم وقاعدته  $AA'$  وارتفاعه نصف القطر الذى مقداره  $2$  سنتيمترا

وسنبين هنا قوانين لتعيين مساحة مثلث بدلالة معالم مختلفة ونبين ذلك أيضا فى تمرينات (١)

(١) اذا علم الضلعان  $AB$  و  $AC$  والزاوية المحصورة بينهما فالقانون الذى يعين المساحة هو  $\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

لأن المساحة  $= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A$

وهذا هو أهم قوانين حساب المثلثات الخاصة بالمساحة ويجب أن يتذكر بهذه الصورة الآتية •



مساحة المثلث  $= \frac{1}{2}$  حاصل ضرب

ضلعين منه في جيب الزاوية الواقعة بينهما

(٢) اذا كان المعلوم ضلعاً واحداً  $AB$  وزوايا المثلث فالمساحة تساوى

$$\frac{1}{2} AB \cdot \frac{2 \sin A \sin B}{\sin C}$$

لأن  $AB \sin C = AC \sin B = BC \sin A$  واذن يكون

$$\frac{1}{2} AB \cdot \frac{2 \sin A \sin B}{\sin C} = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{2 \sin A \sin B}{\sin C}$$

(٣) واذا علم ضلعان  $AB$  و  $AC$  والزاوية المقابلة لأحدهما وليكن الزاوية  $B$

$$\text{فالمساحة} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin B = \frac{1}{2} AC^2 \sin B \tan A$$

وفي هذا القانون يعين مقدار الزاوية  $C$  من المعادلة  $AC \sin C = AB \sin B$

وهذه المعادلة تعطى مقدارين

للزاوية  $C$  أى مقدار الزاوية

الحادة والزاوية المكملة لها أى  $C$

$180^\circ - C$  واذن فيكون هناك

مقداران للمساحة بوجه العموم وهما

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin B \tan A$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin B \tan A \sin(180^\circ - C)$$

$$\text{وهذا المقدار الأخير} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin B \tan A \sin C$$

وبمع ذلك فإذا كان  $C$  أصغر من  $B$  فهذه المساحة الثانية تصير سالبة ولا يمكن قبولها (أنظر أيضاً بند ١٧٤ انخلاص بالحالة المبهمة)

(٤) اذا كانت الاضلاع الثلاثة معلومه فان المساحة تساوى

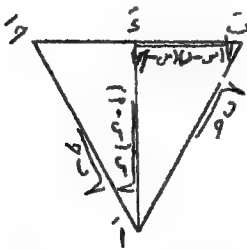
ونصف القاعدة بـ ٢ = (س - ب) (س - ح) كما يمكن

اثبات ذلك بطريقة مماثلة بمعرفة أن مقداره  $\sqrt{ب ح - ح ا} \cdot \frac{1}{2} \cdot ا$  وبتأكد من ذلك باثبات أن

$$س ر (س ر - ا) + (س ر - ب) (س ر - ح) = ب ح$$

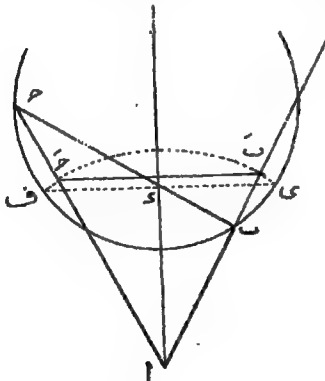
واذن تكون مساحة المثلث مساوية الى حاصل ضرب الارتفاع في نصف القاعدة

$$\sqrt{ب ح - ح ا} \cdot \frac{1}{2} \cdot ا = (س ر - ب) (س ر - ح) (س ر - ا)$$



والمثلث المتساوي الساقين  $ا ب ح$   
المتساوي للمثلث المفروض في زاوية  
الرأس وفي المساحة وهو الذي يمكن  
تسميته بالمثلث المتساوي الساقين المكافئ  
ذو فائدة عظيمة في بعض مباحث علم  
تقدير السطوح والأحجام العملي (أنظر  
تقدير أعمال الحفر والردم بند ١٥٢)

فقرة ثالثة) ويستحسن أنشاؤه بطريقة بسيطة ولذلك طرق عديدة مستنبطة  
من الهندسة الأصلية أبسطها وأخصرها عملا الطريقة الآتية على ما يظهر



١٥ - المطلوب انشاء  
مثلث متساوي الساقين مساو  
لمثلث معلوم في المساحة وزاوية  
رأسه مساوية لاحدى زوايا  
المثلث المعلوم  
ليكن  $ا ب ح$  هو  
المثلث المعلوم وليكن المطلوب  
انشاء مثلث متساوي الساقين  
مساو له في المساحة وزاوية  
رأسه تساوي  $ا$  وليكن  $ا$   
هو منتصف الزاوية  $ا$



فنرسم محيط دائرة مركزها على  $ا$  وبحيث يمر بنقطتي  $ب$  و  $ج$  .  
ثم نرسم من نقطة  $د$  خطاً عمودياً على  $ا$  فيقطع محيط الدائرة في  $هـ$   
ونجعل نقطة  $ا$  مركزاً وننصف قطر  $ا$  في  $ز$  ونرسم دائرة تقطع  $ا ب$  و  $ا ج$   
في  $ب$  و  $ج$  على التناظر فيكون  $ا ب$  و  $ا ج$  هو المثلث المتساوي الساقين  
المكافئ المطلوب وأثبت ذلك أن المثلث متساوي الساقين بالعمل فلم يبق سوى  
إثبات أن  $ا ب$  أي  $ا ب = ا ج$  وبمقتضى ما هو مقرر  
في الهندسة يكون

$$ا ب + ب ج + ج ا = ا ب + ب ج + ج ا$$

وبما هو مقرر أيضاً في الهندسة يكون

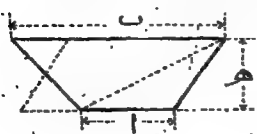
$$ا ب + ب ج + ج ا = ا ب + ب ج + ج ا$$

$$ا ب + ب ج + ج ا = ا ب + ب ج + ج ا$$

$$ا ب + ب ج + ج ا = ا ب + ب ج + ج ا$$

١٦ - مساحة شبه المنحرف

الشكل الرباعي الذي له ضلعان متوازيان يسمى شبه المنحرف (ويسمى  
أحياناً منحرفاً) وإذا كان طول ضلعيه المتوازيين  $ا$  و  $ب$  والمسافة العمودية  
بينهما المسماة بارتفاع شبه المنحرف تساوي  $هـ$  فإن المساحة تساوي  
 $\frac{1}{2} (ا + ب) \times هـ$  كما يمكن أن يرى بسهولة بقسمته الى مثلثين



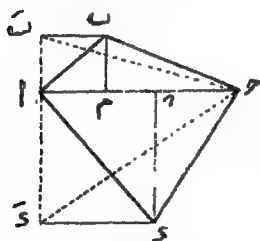
وعليه يكون الطول  $\frac{1}{2} (ا + ب)$   
هو العرض المتوسط وهو يساوي  
العرض في منتصف المسافة بين  
 $ا$  و  $ب$  كما هو واضح وهذا مطابق

لما هو واضح في بند ٩١ الذى منه يرى أنه اذا كان القطاع المتوسط هو المتوسط الحسابى للقطاعين المتطرفين فانه يساوى القطاع الواقع فى وسط الارتفاع وهذه النظرية صادقة بالضبط فى حالة العرض المتوسط للمساحة المستوية كما هى صادقة بالنسبة للقطاع العرضى المتوسط للجسم (أنظر أيضاً بند ١٤ الخاص بالعرض المتوسط للثلث الذى يمكن اعتباره حالة مخصوصة من شبه المنحرف)

فاذا رسمنا خطاً منصفاً لأحد الأضلاع وموازياً للضلع الثانى فمن الواضح أنه يتحصل عندنا متوازى أضلاع مساو له فى المساحة وارتفاعه يساوى ارتفاع شبه المنحرف وعرضه يساوى العرض المتوسط واذن فيمكن بهذا الرسم اثبات القانون الخاص بالمساحة بطريقة أخرى

### ١٧ - مساحة كثير الأضلاع

أى شكل كثير الأضلاع يمكن قسمته الى مثلثات وأشباه منحرف



وتحسب مساحته بناء على ذلك اذا قيست الأبعاد المناسبة لهذا الحساب وعلى الأخص الشكل الرباعى يمكن قسمته الى مثلثين بقطر فاذا قيس طول القطر والمسافة العمودية بين الرؤوس الأخرى والقطر فيمكن حساب مساحته لأنها تساوى

حاصل ضرب القطر فى نصف مجموع العمودين فمثلاً مساحة الشكل الرباعى

$$ا ب ح د \text{ الموضح بالشكل تساوى } ا ح \cdot \frac{ب د + د م}{٢}$$

ومع ذلك اذا رسم موازى ان للخط ا ح من نقطتي ب و د فانه يتكون

مثلث ح ب د مساحته تساوى مساحة الشكل المفروض وقاعدته

$$= ب م + د د \text{ وارتفاعه يساوى } ا ح$$

أو يمكننا أن نرمس مثلثا مكافئا ذا ارتفاع مناسب وذلك بأن نرمس دائرة مركزها ح ونصف قطرها مساو للارتفاع المطلوب (أقل من ١ ح) ونرمس مماسا للدائرة يمر بنقطة ١ بحيث يقابل المتوازيين ب ب و ٦ و ٥ في تقطعي ب و ٥ فيكون المثلث ح ب و مساويا في المساحة للشكل الرباعي المعلوم ومساحته تساوى ب و مضروبا في نصف طول نصف القطر المنتخب فإذا كان طول نصف القطر مثلا ٢ ستيمتر فإن مقدار ب و الستيمتر الطولى تساوى مساحة ١ ب ح و الستيمتر المربع

### تمرينات (١)

المطلوب إيجاد مساح المثلثات ١ ب ح في الأحوال التسعة الآتية

$$(١) \quad ١ ب = ٣٦,٥٠ \text{ مترا } ١ ب = ١٦ = ٧٢,٣٠ \text{ مترا زاوية } ١ = ٦٠^\circ$$

$$(٢) \quad ١ ب = ٣١٥,٦ \text{ » } ١ ب = ١٦ = ٤٢٢,٥ \text{ » } ٦ = ١ = ٧٣١٥^\circ$$

$$(٣) \quad ١ ب = ٩٢,٧٥ \text{ ستيمترا } ١ ب = ١٦ = ٣٤١٩^\circ \text{ » } ٦ = ١ = ٦٩٤٨^\circ$$

$$(٤) \quad ١ ب = ٩٢,٧٥ \text{ » } ١ ب = ١٦ = ٣٤١٩^\circ \text{ » } ٦ = ١ = ٦٩٤٨^\circ$$

$$(٥) \quad ١ ب = ٣٩٢ \text{ مترا } ١ ب = ١٦ = ٥٢١ \text{ مترا } ٦ = ٤٥^\circ$$

$$(٦) \quad ١ ب = ٥٢١ \text{ » } ١ ب = ٣٩٢ \text{ » } ٦ = ٤٥^\circ$$

$$(٧) \quad \text{الأضلاع} = ٣٢ \text{ } ٦٤ \text{ } ٤٨ \text{ مترا على التناظر}$$

$$(٨) \quad \text{» } ١٥ = ٢٠٦ \text{ » } ٢٥٦$$

$$(٩) \quad \text{» } ٤٢٣ = ٤٨٦ \text{ » } ٥٣٧$$

والمسائل الآتية (لغاية منهالة ٢١) مهمة في موضوع تقدير مكعبات الحجر

والردم

(١٠) اذا كان طول أحد أضلاع مثلث = ١ وكان ب ٦ ح هما الزاويتان المجاورتان لهذا الضلع فالمطلوب اثبات أن مساحة المثلث =  $\frac{1}{2} (ظنا ح + ظنا ح)$   
 (١١) المطلوب إيجاد مساح المثلثات الآتية ورسمها بمقياس الرسم .

$$١ - ١ = ٢٠ \text{ مترا } ٦ \text{ ظنا ب} = ٦,٥ \text{ ظنا ح} = ١,٥ +$$

$$١ - ٢ = ٥٦ \text{ » } ٦ \text{ ظنا ب} = ١٥ \text{ ظنا ح} = ١ \pm$$

$$١ - ٣ = ٩٠ \text{ » } ٦ \text{ ظنا ب} = ١١ \text{ ظنا ح} = ٥ \pm$$

(١٢) اذا قابل منتصف الزاوية ١ الضلع ب ح في نقطة و ورسم الخطان ب م ٦ ح د عمودين على ١ و فالمطلوب اثبات أن ١ و هو الوسط التوافقي بين ا م ٦ ا د

(١٣) اذا امتد المنتصف ١ و للزاوية ١ الى النقطة و بحيث يكون ١ و هو الوسط الهندسي بين ا م ٦ ا د فالمطلوب اثبات أن مساحة المثلث =  $١ \text{ و } ١ \text{ ظنا } ١ \frac{1}{4}$

(١٤) المطلوب اثبات أنه في الشكل السابق في المسئلة الثانية عشرة اذا كانت و هي الزاوية الحادة في نقطة و فأطول الخطين ا م ٦ ا د

$$= ١ \times \frac{١ \text{ و}}{١ \text{ و} - ١ \frac{1}{4} \text{ و}}$$

$$\text{وأقصرهما} = ١ \times \frac{١ \text{ و}}{١ \text{ و} + ١ \frac{1}{4} \text{ و}}$$

(١٥) اثبت أن مساحة المثلث ا ب ح =

$$\left( \frac{١ \text{ و} \cdot ١ \frac{1}{4} \text{ و}}{١ \text{ و} - ١ \frac{1}{4} \text{ و}} + ١ \right) ١ \frac{1}{4} \text{ و}$$

(4)

(٢٢) اثبت أن الدائرة التي تمر بنقطتي ب و ج في الشكل الموضح في بند ١١٥ تقطع أ في نقطتين احدهما هي مركز الدائرة المرسومة في المثلث أ ب ج والاخرى هي مركز الدائرة المرسومة على الضلع ب ج

(٢٣) اثبت (في الشكل نفسه) أن النسبة بين ب ح الى ع ف = ج ا واستنبط من هذا أنه اذا أخذ من الخط ب ح طولان ع و ف مساويين الى ع فالخطان ب ع و ج ا ف يكونان موازيين الى ا و  
(٢٤) اثبت أن مركز الدائرة المذكورة يكون على محيط الدائرة المرسومة على المثلث

المطلوب اثبات النظريات الآتية بقسمة الاشكال الى مثلثات بكيفية لائقة

(٢٥) اذا رسم خط من رأس المثلث بحيث يقابل القاعدة ب ج في نقطة و وأزل عمودان م ب و ج د على ا و فالمطلوب اثبات أن مساحة المثلث =  $\frac{1}{4} ا و (ب م + ج د)$

(٢٦) المطلوب اثبات أنه اذا قطع خط مستقيم الضلع ب ج في نقطة و وخطا آخر مرسوما من نقطة ا موازيا للضلع ب ج في نقطة ك فمساحة المثلث تساوى  $\frac{1}{4} و ك (ب م + ج د)$  وفي هذا القانون ب م و ج د هما خطان مرسومان من ب و ج عمودين على و ك . ثم اذا كانت نقطة و على امتداد الخط ب ج عوضا عن أن تكون بين ب و ج فها هو التعديل اللازم ادخاله في النظرية بالتطبيق لذلك

(٢٧) المطلوب اثبات أنه اذا تقاطع قطرا شكل رباعي على زاوية قائمة فان المساحة =  $\frac{1}{4}$  حاصل ضرب القطرين

(٢٨) اثبت أن مساحة أى شكل رباعى تساوى نصف حاصل ضرب

قطريه فى جيب الزاوية المحصورة بينهما

(٢٩) المطلوب انشاء متوازى أضلاع مساحته ضعف مساحة شكل رباعى معلوم

(٣٠) اذا قطع خط الضلعين المتقابلين من متوازى أضلاع فى النقط  $و$   $ك$  وكانت  $ا$   $ب$   $ج$   $د$   $هـ$   $و$   $ز$  هى أطوال الأعمدة النازلة على  $و$   $ك$  من رؤوس متوازى الأضلاع فالمطلوب اثبات أن المساحة  $= \frac{1}{4} و$   $ك$  ( $ا + ب + ج + د + هـ + ز$ ) ثم ما هو التعديل اللازم ادخاله فى النظرية اذا كانت  $و$  أو  $ك$  أو كلاهما على امتداد الخط

(٣١) اذا قطع قاطع الضلعين المتوازيين من شبه منحرف فى نقطتي  $و$   $ك$  وكان  $ا$   $ب$   $ج$   $د$   $هـ$   $و$   $ز$  أطوال الأعمدة النازلة من الرؤوس على  $و$   $ك$  فالمطلوب اثبات أن مساحة شبه المنحرف  $= \frac{1}{4} و$   $ك$  ( $ا + ب + ج + د + هـ + ز$ )

(٣٢) اثبت أن مساحة أى شكل كثير الأضلاع مرسوم على دائرة  $= س$  ومقدار  $س$  هو نصف قطر الدائرة ومقدار  $س$  هو نصف مجموع الأضلاع المكوّنة للضلع

(٣٣) اذا كان مضلع منتظم عدد أضلاعه  $د$  وطول كل ضلع يساوى  $ا$  ونصفا قطري الدائرتين المرسومتين داخله وخارجه على التناظر هما  $س$   $ج$   $ي$  فالمطلوب اثبات أن  $ا = ٢ س$   $طا = \frac{٢}{د} س$   $٢ س$   $حا = \frac{٢}{د} س$

(٣٤) المطلوب ايجاد مساحة مثلث متساوى الأضلاع (أولاً) بدلالة أحد أضلاعه (ثانياً) بدلالة نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (ثالثاً) بدلالة نصف قطر الدائرة المرسومة خارجه

(٣٥) المطلوب إيجاد مساحة سدس منتظم بدلالة الكميات السالف ذكرها

(٣٦) المطلوب إيجاد مساحة مضلع منتظم عدد أضلاعه  $n$  بدلالة الكميات نفسها وامتحان الناتج بفرض  $n = 3$  ومقارنته بما في مسألة ٣٤

(٣٧) قطعة ورق على شكل مثلث متساوي الأضلاع قطعت زواياها بحيث يكون الشكل الناتج سدساً منتظماً والمطلوب مقارنة مساحة السدس بالمساحة الأصلية لقطعة الورق

### ١٨ — طول القوس الدائري

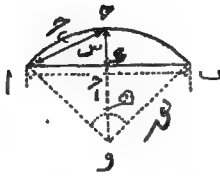
ليكن  $AB$  هو القوس وليكن  $OC$  نصف قطر الدائرة  $O$  هو التقدير الدائري للزاوية المركزية المقابلة للقوس

$$\text{فالتقدير الدائري للزاوية هو } \frac{\text{القوس}}{AB} = \theta \quad \text{واذن يكون} \\ \underline{\underline{\text{القوس} = \theta \cdot AB}}$$

ومن هنا يرى أنه اذا كان المقياس الدائري للزاوية معلوما وكذلك نصف قطر الدائرة يمكن حساب مقدار القوس

والتقدير الدائري لزاويتين ثابتتين يساوي نصف المحيط  $\div$  نصف القطر وهذه النسبة هي مقدار ثابت لا يمكن بيانه بغاية الضبط بأى عدد محدود الا أن مقداره محسوبا لغاية ثمانية أرقام اعشارية يساوى  $3,14159265...$  والمقدار التقريبي هو  $3,1416$  وهناك مقدار تقريبي أقل ضبطاً وهو  $3 \frac{1}{7}$  الا أن هذا المقدار كاف لضبط معظم الحسابات العملية والخطأ فيه بالزيادة عن الحقيقة يساوى نحو  $\frac{1}{10000}$  فقط من مقداره ويرمز لهذه النسبة عادة بالرمز  $\pi$





ويمكن إيجاد مقدار التقدير الدائري  
لأى زاوية إذا علمت نسبتها إلى زاويتين  
قائمتين

فإذا كانت الزاوية مشتملة على درج  
قدره  $س$  فنسبتها إلى زاويتين قائمتين  $= \frac{س}{١٨٠}$

ومن هنا يكون  $\frac{س}{١٨٠} = \frac{ط}{٦}$   
 $س = \frac{ط}{١٨٠} \times ٦$

وهناك تقريب نافع لمقدار الكسر  $\frac{ط}{١٨٠}$  وهو  $\frac{٧}{٤٠٠}$  ناقصا  $\frac{١}{٤}$  في المائة  
(أنظر الفصل التاسع بند ١٨٦) وهذا يعطى الارتباط

$$س = \frac{٧}{٤٠٠} (١ - \frac{١}{٤})$$

وطول المحيط جميعه يساوى  $٢ ط$  لأن التقدير الدائري لأربع زوايا  
قائمة هو  $٢ ط$

١٩ - معادلات تربط بين  $ط$  و  $س$

إذا علم مقدار القوس بدلالة سهمه  $س$  ووتره  $ح$  فيلزم أن يحسب مقدار  
بين  $ط$  و  $س$  ثم يحسب بناء على ذلك حاصل ضربهما الذى هو طول القوس  
والمعادلات التى تعطى بين  $ط$  و  $س$  بدلالة  $س$  يمكن الحصول عليها بسهولة  
كما يأتى فنقول من المعلوم فى الهندسة أن

$$٢ س = (١ ح) = \frac{٢}{١} (١ ح) + س = ٢ س$$

ومن هنا يكون  $٢ س = \frac{١}{٤} س + س$  ..... (١)

وأىضا فان الزاوية  $ح$   $أ ب = \frac{١}{٢} ح$  و  $ب = \frac{١}{٤} ح$

واذن يكون  $\frac{ط}{١٨٠} = \frac{٢ س}{٤٠٠}$  ..... (٢)

ومن هاتين المعادلتين يمكن حساب  $u$  و  $h$  والحساب الأخير يستدعي وجود جدول الظلال ثم تعيين التقدير الدائرى للكمية  $h$  إما من جدول التقدير الدائرى أو من القانون المذكور فى البند السابق

وبدلاً من استعمال المعادلة (١) يمكن إيجاد مقدار  $u$  بواسطة الارتباط الآتى السهل الإثبات وهو  $u = \frac{1}{2} h$  قنا  $\frac{1}{4} h$  وذلك بعد إيجاد مقدار  $\frac{1}{4} h$  من المعادلة (٢)

وإذا لم يعلم السهم ولكن علم الوتر  $h$  للقوس والوتر  $h$  لنصف القوس المعلوم فالمعادلات التى تستعمل هى

$$\text{جنا } \frac{1}{4} h = \frac{1}{2} \frac{h^2}{h} \text{ ثم احدى المعادلتين الآتيتين وهما}$$

$$u = \frac{1}{2} h \text{ قنا } \frac{1}{4} h \text{ أو } u = \frac{1}{2} h \text{ قنا } \frac{1}{4} h$$

## ٢٠ - المقادير التقريبية لطول قوس دائرى

إذا علم الوتر والسهم لقوس أو علم وتر القوس وتر نصفه فيكون الأحسن فى العمل غالباً بدلاً من حساب  $u$  و  $h$  أن يستعمل قانون تقريبي فليكن  $h$  هو وتر القوس  $h$  وتر نصفه  $h$  السهم بحيث يكون

$$\frac{1}{4} h + \frac{1}{4} h = \frac{1}{2} h \text{ (بمقتضى ما هو مقرر فى الهندسة)}$$

واذن فيستنتج تقريباً فى حالة ما يكون القوس أقل من نصف الدائرة أن

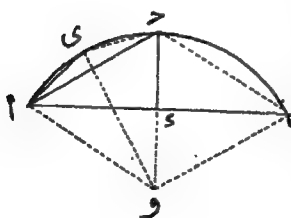
$$\text{القوس} = \frac{1}{4} (h - \frac{1}{4} h) \dots \dots \dots (١)$$

وهذا القانون يعطى القوس طولاً أقل من الحقيقة بقليل جداً بحيث يكون الخطأ فى نصف المحيط جزءاً من ثمانين جزءاً ثم يتناقص بسرعة الى جزء من ألف فى ربع المحيط وبرهان هذا القانون مبين فى بند ٢١

والخطأ في هذا القانون هو ١ من ٨٠ في الدائرة الثامنة وأقل من جزء من ألف في نصف المحيط  
ولكن أدق قانون هو

(ج) . . . . .  $\frac{206 + 40 - 1}{20} = \text{القوس}$

والخطأ هنا هو نحو جزء من ٤٠٠ جزء في الدائرة التامة ويتناقص بسرعة عظيمة جدا وهو في نصف الدائرة جزء من ٢٥,٠٠٠ فقط



ومن الموافق أن يرضى للأطوال  
المتحصلة من هذه القوانين بالرموز  
ل 6 ل 6 ل 6 ل على التناظر

١ فالقانونان لـ ٦ يحتاجان لتعيين مقدار ح وكذلك لمقداري ح ٦ ح بحيث يجب أن نستطيع أن نحسب ح في حالة عدم إمكان قياسه

<sup>٢</sup> فالارتباط الواقع بين الثلاثة الأوتار هو

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

وبرهان ذلك - لكن ان ا ب ا ح ا ي هي الأوتار الثلاثة

فالزاوية  $\gamma$   $\alpha$  ح هي نصف الزاوية  $\alpha$  ب لأن القوس  $\gamma$  ح  
المقابل لها هو نصف القوس  $\alpha$  ب ح

$$\text{والزاوية } \alpha \text{ ب } = \frac{1}{2} \text{ ح}$$

$$\text{واذن يكون } \gamma \text{ ح } = \frac{1}{8} \text{ ح}$$

$$\text{ويكون } \text{ح } \frac{1}{8} \text{ ح} = \frac{3}{32} \text{ ح} \text{ ح } \frac{1}{2} \text{ ح} = \frac{1}{32} \text{ ح}$$

$$\text{وأیضا فان } 1 + \text{ح } \frac{1}{2} \text{ ح} = 2 \text{ ح } \frac{1}{8} \text{ ح}$$

$$\text{واذن يكون } 1 + \frac{1}{32} \text{ ح} = \left( \frac{3}{32} \text{ ح} \right)^2$$

$$\text{ومن هنا يستنتج أخيرا } \frac{1}{32} \text{ ح} = \frac{1}{32} \text{ ح} + \frac{1}{32} \text{ ح}$$

واذن فيمكن إيجاد مقدار  $\gamma$  ح من هذه المعادلة أو بالاستعانة بالجدول  
من المعادلة  $2 \gamma \text{ ح} = \gamma \text{ ح} \text{ ح } \frac{1}{8} \text{ ح}$  وذلك بعد تعيين  $\frac{1}{2} \text{ ح}$  من المعادلة

$$\text{ح } \frac{1}{2} \text{ ح} = \frac{1}{32} \text{ ح}$$

٢١ - اثبات القوانين  $1$   $6$   $2$   $6$   $3$  الخاصة بطول القوس الدائري

[ان البرهان يرتبط بما هو معلوم من أنه اذا قدرت الزاوية  $\alpha$  بتقديرها  
الدائري فان الارتباط الآتي بين  $1$   $6$   $2$   $6$   $3$  يكون

$$1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$\text{فان } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ ح} = \frac{1}{3} \text{ ح}$$

هذه العلامة  $1$  تدل على حاصل ضرب الأعداد الصحيحة المتوالية من أول الواحد لغاية العدد  
الموضوع داخل العلامة فمثلا  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

واذن يكون  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \text{ ح} = 2 \text{ ح} \frac{1}{4} \text{ ح}$

وبمثل ذلك يكون  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ح} = 2 \text{ ح} \frac{1}{8} \text{ ح}$

6  $\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ ح} = 2 \text{ ح} \frac{1}{16} \text{ ح}$

ويكون

$$(1) \left[ 0 - \frac{9(\frac{1}{2} \text{ ح})}{2} + \frac{2(\frac{1}{2} \text{ ح})}{3} - \frac{1}{4} \text{ ح} \right] \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \text{ ح}$$

$$(2) \left[ 0 - \frac{9(\frac{1}{4} \text{ ح})}{2} + \frac{2(\frac{1}{4} \text{ ح})}{3} - \frac{1}{8} \text{ ح} \right] \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ ح}$$

$$(3) \left[ 0 - \frac{9(\frac{1}{8} \text{ ح})}{2} + \frac{2(\frac{1}{8} \text{ ح})}{3} - \frac{1}{16} \text{ ح} \right] \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ ح}$$

فلاجل الحصول على مقدار ل يلزم أن تؤخذ المعادلتان (1) و (2) معا بحيث يمحذف منهما  $\frac{1}{2}$  وذلك بأن يؤخذ المقدار 8 ح - ح  
فاذا صرفنا النظر عن قوى الكمية ح الأعلام من ح يكون

$$\left[ \frac{9(\frac{1}{2} \text{ ح})}{2} - \frac{9(\frac{1}{4} \text{ ح})}{2} + \frac{1}{4} \text{ ح} - 2 \text{ ح} \right] \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \text{ ح} - \frac{1}{4} \text{ ح}$$

$$(8 - 32) \frac{9(\frac{1}{4} \text{ ح})}{2} \frac{1}{2} = 3 \text{ ح} - 2 \text{ ح}$$

$$= 3 \text{ ح} \left[ \frac{9(\frac{1}{4} \text{ ح})}{20} - 1 \right]$$

واذن يكون  $\frac{1}{4} (8 - 3) = \frac{1}{4} \text{ ح} = \frac{1}{4} \text{ ح}$  قوس  $\left[ \frac{9(\frac{1}{4} \text{ ح})}{20} - 1 \right]$

وإذا ضربنا كلا من طرفي هذه المعادلة في ١ +  $\left(\frac{١}{٣٠} هـ\right)$  وتذكرنا أن  
 نحذف قوى هـ التي تزيد عن هـ<sup>٤</sup> ينتج عندنا الارتباط  

$$\frac{\text{القوس}}{١} = \left[ ١ + \left(\frac{١}{٣٠} هـ\right) \right]$$

وينتج من ذلك أن المقدار لـ يكفي لتقريب طول القوس بشرط أن  
 يكون المقدار  $\frac{١}{٣٠} هـ$  صغيراً صغيراً كافياً لإهماله  
 وبمثل ذلك يكون

$$\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣} = \text{نصف القوس} \left[ ١ - \left(\frac{١}{٣٠} هـ\right) \right]$$

ويكون

$$\frac{\text{القوس}}{٧} = \left[ ١ + \left(\frac{١}{٣٠} هـ\right) \right]$$

ومن هنا ينتج أن مقدار لـ تقريب كاف إذا كان  $\frac{١}{٣٠} هـ$  صغيراً  
 صغيراً كافياً لإهماله فمثلاً إذا كان هـ = ٢٤٠ يكون  $\frac{١}{٣٠} هـ = ٨$  والتقدير  
 الدائري لهذه الزاوية يزيد قليلاً عن  $\frac{١}{٣}$  وإذا كان يكون  $\frac{١}{٣٠} هـ$  يزيد قليلاً  
 عن  $\frac{١}{٤٨٠}$

ولأجل إيجاد مقدار لـ يلزم أن نضم المضاعفات لمقادير ج ٦ ج ٦ ج  
 التي بها تنعدم مقادير هـ<sup>٢</sup> هـ<sup>٣</sup> هـ<sup>٤</sup> واذن فالخطأ الناشئ يكون منسوباً للكبة  
 هـ<sup>٦</sup> ولعمل ذلك يلزم أخذ لـ ج + م ج + د ج وتنتخب مقادير  
 لـ م د بحيث تتحى معاملات هـ<sup>٢</sup> هـ<sup>٣</sup> هـ<sup>٤</sup> أي بحيث يكون

$$(٤) \quad \dots \dots \dots \left[ ٠ = \frac{د}{٣٨} + \frac{م}{٣٤} + \frac{ج}{٣٢} \right]$$

$$(٥) \quad \dots \dots \dots \left[ ٠ = \frac{د}{٩٨} + \frac{م}{٩٤} + \frac{ج}{٩٢} \right] \quad ٦$$

فمن المعادلة (٤) يكون

$$٠ = ٣ + ٨م + ٦٤ل$$

ومن المعادلة (٥) يكون

$$٠ = ٣ + ٣٢م + ١٠٢٤ل$$

$$٠ = ٣ + ٢٤م + ٩٦٠ل \quad \text{ومن هنا يكون}$$

$$٠ = ٣ + ٤٠م \quad \text{أى}$$

وهذه المعادلة تكون صحيحة اذا فرض  $ل = ١$   $٦١م = -٤٠$  واذن

$$\text{يكون } ٣ = ٢٥٦$$

$$\text{واذن يكون } ١ - ٤٠م + ٢٥٦ = ٢ \text{ أى } \left[ \frac{٧(١-٨)}{٧} - ١ \right]$$

$$٨٠ - \left[ \frac{٧(١-٨)}{٧} - ١ \right] + ٥١٢ = ٨٠$$

وذلك باهمال قوى الكمية  $٧$  من  $٧$

وهذا يؤول الى

$$\left[ \frac{٧(١-٨)}{٣١٥} - ١ \right] ٤٥ = ٢٥٦ + ٤٠م - ١$$

واذن يكون

$$\frac{٢٥٦ + ٤٠م - ١}{٤٥} = \text{قوس} = \left[ \frac{٧(١-٨)}{٣١٥} - ١ \right]$$

$$\left[ \frac{٧(١-٨)}{٣١٥} + ١ \right] ٣ = \text{القوس} \quad \text{أى أن}$$

والكيفية  $\frac{٤}{٣١٥} (\frac{١}{٨} \text{ هـ})$  صغيرة جدا على الدوام لأنها تساوى فقط  $\frac{٣}{١٠٠٠}$  متى كان هـ = ٢ ط أى فى المحيط كله وينتج من ذلك أنه يمكن أخذ لـ مقدارا مضبوطا بالنسبة لجميع الأقواس

٢٢ - الارتباط بين لـ ١ ٦ ٦ لـ ٣

ان القانون لـ غير موافق للاستعمال مثل قانونى لـ ١ ٦ ٦ لـ الا أنه يمكن الحصول عليه بتجميع مقدارى لـ ١ ٦ ٦ لـ

$$\frac{٢ل١ + ل٢}{٤ + ٥} = ل٣$$

واذن يكون

$$(٥ + ٤) = \frac{١ - ٤٠ + ٢٥٦}{٤٥} = ٥ + \frac{١ - ٨}{٢} = ٢ + \frac{١ - ٨}{٢}$$

أى ان

$$١٦ + ٥ = ٢١ - (١٠ + ٥) = ١٦$$

$$٠ = (١٦ + ٥) = ٢٥٦$$

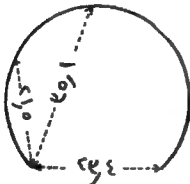
وهذه المعادلة تتحقق بأخذ ٥ = ١٦ ٦ = ٤ - ١

$$\frac{١٦ - ١}{١٥} = ل٣$$

ومن هنا يكون

أى أنه اذا أريد معرفة طول القوس بأدق ما يمكن عملا وكانت الأطوال ح ٦ ح ٦ ح قد قيست فانه يجب البسده بإيجاد مقدارى لـ ١ ٦ ٦ لـ فإذا اتحدا فى النتيجة كان المقدار الناتج هو الطول المطلوب





ولكن اذا وجد اختلاف ( ولم يكن ناشئا  
بالضرورة من خطأ في الحساب ) فان الطول  
الحقيقي يكون هو  $\frac{1}{10} (L_1 - L_2)$  أى  
 $L_2 + \frac{1}{10} (L_1 - L_2)$  وهذا هو  
المقدار اللازم استعماله على هذه الصورة  
في الحساب فانما أريد فحص الحساب يلزم أن يحسب مقدار  $L_2$  على انفراده  
وهذا يتفق بالضبط طبعاً مع النتيجة المتقدمة

مثال = ليكن  $L_1 = 23,4$  ح  $L_2 = 35,1$  ح  $21,5$  = ستيمترات

$$L_1 = \frac{1}{3} (L_1 - L_2) \quad L_2 = \frac{2}{3} (L_1 - L_2)$$

$$21,5$$

$$\times 8$$

$$172,0$$

$$35,1 -$$

$$136,9 =$$

$$40,6$$

$$91,3 = L_2$$

$$206 \text{ ح} - 40 \text{ ح} + 1 \text{ ح} =$$

$$166$$

$$5504,0 =$$

$$+ 23,4 =$$

$$5527,4$$

$$- 1404,0 =$$

$$4123,4 \div 5 =$$

$$824,7 \div 9 =$$

$$91,6 =$$

$$35,1$$

$$\times 8$$

$$280,8 =$$

$$23,4 -$$

$$257,4 \div 3 =$$

$$85,8 =$$

$$85,8 = L_1$$

$$L_1 - L_2 =$$

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{3} =$$

$$\frac{1}{3} =$$

$$91,3 = L_2$$

$$- 85,8 =$$

$$5,5 \div 10 =$$

$$0,5 =$$

$$+ 91,3 = L_1$$

$$91,7$$

واذن يكون طول القوس ٩١,٦ سنتيمتر تقريبا

أما اذا لم يكن  $\gamma$  قد قيس وكان القوس كبيرا فينحصر الأمر في تقرير ما اذا كان الأحسن حساب مقداره ثم استعمال القانون السابق أو أن يبحث عن مقدار  $\gamma$   $\delta$  ثم يعين القوس بناء على ذلك فاذا لم توجد جداول فن الضروري حساب مقدار  $\gamma$  ولكن اذا وجد جدول من جداول المربعات والمكعبات فان حساب  $\gamma$  يكون سهلا جدا ولكن اذا وجد جدول من جداول الخطوط المساحية ولم يكن لدينا جدول المربعات والمكعبات فربما يكون الأفضل حساب  $\gamma$   $\delta$  ويعين القوس بناء على ذلك وقد بينا مثلا من أمثلة هذه الطريقة فيما يلى الا أنه من اللازم قياس  $\gamma$  متى أمكن

كيفية إيجاد  $\gamma$   $\delta$  وطول القوس فى المثال السابق من القانونين

$$\text{جنا } \frac{1}{4} \text{ هـ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \text{ هـ} = 2 \text{ هـ} = 2 \text{ هـ} \text{ قتا } \frac{1}{4} \text{ هـ}$$

$$\text{حا } \frac{1}{4} \text{ هـ} = \frac{117}{351} = \frac{1}{3}$$

واذن يكون

$$\frac{1}{4} \text{ هـ} = 70.32^\circ \text{ والتقدير الدائرى لهذه الزاوية هو } 1,231$$

$$\text{ويكون قتا } \frac{1}{4} \text{ هـ} = 1,06063$$

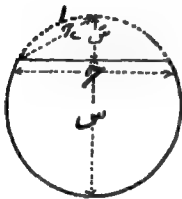
وبضرب هذا المقدار فى ٢  $\gamma$  يكون

$$2 \text{ هـ} = 2,12126$$

$$\text{وأخيرا } 2 \text{ هـ} \times \frac{1}{4} \text{ هـ} = 91,66$$

واذن يكون القوس = ٩١,٦٦ سنتيمرا

٢٣ - وهناك طريقة أخرى لتعيين قوس قطعة دائرية أكبر من نصف محيط الدائرة اذا علم كل من الوتر  $ح$  والمهم  $س$  للقطعة وهى أن يعين طول قوس القطعة الصغرى التى تكمل الدائرة ومحيطها والفرق بين هذين الطولين يكون هو طول القوس المطلوب وهالك الطريقة المشار اليها وهى تعطى نتائج مضبوطة فى جميع الأحوال التى فيها مقدار السهم  $س$  أكبر من الوتر  $ح$ .



فاذا رمزنا بالرمز  $س$  لسهم القطعة الصغرى يكون

$$س - س = \frac{1}{4} ح$$

$$\text{واذن يكون } س = \frac{\frac{1}{4} ح}{س}$$

ومحيط الدائرة = ط (س + س)

ولنفرض أن  $ح$  هو وتر نصف القوس الأصغر

$$\text{فيكون } \frac{1}{4} ح = س (س + س) = \frac{1}{4} ح + س$$

ومن احدى هاتين المتساويتين يمكن حساب مقدار  $ح$  والمتساوية الأخيرة هى الأحسن استعمالا اذا وجد جدول للربعات والجذور التربيعية

$$\frac{1}{4} (8 - \frac{1}{4} ح) = \text{فطول القوس الأصغر}$$

$$\text{واذن فطول القوس المطلوب} = ط (س + س) - \frac{1}{4} (8 - \frac{1}{4} ح)$$

$$ح = ٢٣,٤٦٦ = ٦ س = ٣٣,١ \quad \text{مثال - ليكن}$$

$$\text{فيكون } س = \frac{\frac{1}{4} ح}{س} = \frac{١٣٧٩}{٣٣,١} = ٤,١٥$$

$$٢ = ٣٧,٢ = س$$

$$٢ ط س = ١١٦,٩$$

وأیضا  $ح_٢ = ح_١ \cdot \frac{١}{٤} + ح_٢ = ١٥٣,٧$

واذن يكون  $١٢,٤ = ح_٢$

والقوس الأصغر  $٢٥,٣ = (٨ ح_٢ - ح_١) \cdot \frac{١}{٢} =$

ويكون القوس المطلوب  $٩١,٦ = ٢٥,٣ - ١١٦,٩ =$

## تمارينات (٢)

(١) قطعة دائرية وترها ٦٠ مترا وسهمها ١٠ أمتار فما طول قوسها

(٢) وتر قوس دائري يساوى ٢٠٠ مترو وتر نصفه يساوى ١٢٠ مترا  
فما طول القوس

(٣) ابحث عن أنصاف قطرى الدائرتين فى المثالين السابقين

(٤) المطلوب امتحان القانون  $ح_١ = (٨ ح_٢ - ح_١)$  لتعيين قوس دائري بتطبيقه على قوس صغير من دائرة كبيرة كبرا غير محدود أى على خط مستقيم

(٥) المطلوب امتحان القانون  $ح_١ = (٢٥٦ ح_٢ - ٤٠ ح_١ + ح_٢)$  بتطبيقه على خط مستقيم

(٦) المطلوب امتحان القانون  $ح_٢ = ح_١ \cdot \frac{٢}{٢} \div (٢ ح_٢ + ح_١)$  بتطبيقه  
(١) على خط مستقيم (٢) على دائرة تامة

(٧) المطلوب ايجاد وتر ربع القوس حينما يكون وتر جميع القوس ٢٠ سنتيمترا وتر نصفه ١٢ سنتيمترا

(٨) المطلوب ايجاد وتر ربع قوس حينما يكون وتر القوس كله ١٣ سنتيمترا وتر نصفه ٢١ سنتيمترا وبيان أنه فى هذه الحالة يكون  $ح_١ = ٦$   $ح_٢$  قريبين جدا من ضلعى خماس منتظم  $٦$   $ح_٢$  قطره

(٩) المطلوب إيجاد وتر القوس التام حينما يكون وتر نصفه ٢١ ستيمترا ووتر ربعه ١٣ ستيمترا

(١٠) المطلوب إيجاد سهم القوس ونصف قطر دائرته في مسألة (٨)

(١١) المطلوب اثبات أن السهم  $\frac{1}{2}$  لنصف القوس يحقق المعادلة

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$$

(١٢) المطلوب اثبات أن سهم نصف القوس =

$$\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

(١٣) المطلوب إيجاد الخطأ النسبي بالتقريب في القانون لـ أى

$$\frac{1}{2} (8 - \frac{1}{2}) \text{ حينما يكون } h = 90^\circ \text{ (فرض أن } \theta = 10^\circ)$$

(١٤) المطلوب إيجاد مقدار الخطأ النسبي بالتقريب في القانون لـ حينما

$$\text{يكون } h = 90^\circ$$

(١٥) المطلوب اثبات أن الخطأ في مقدار لـ هو أكبر من الخطأ

في مقدار لـ بقدر ١٦ مرة وذلك بفرض أن لـ مضبوط

(١٦) المطلوب اثبات أن المعادلات الثلاثة لـ = لـ = لـ متفقة مع

بعضها وانها جميعها تؤدي الى ارتباط تقريبي وهو لـ ١٦ = لـ ١٠ = لـ

$$- \frac{1}{2}$$

(١٧) المطلوب امتحان الارتباط التقريبي لـ ١٦ = لـ ١٠ = لـ بتطبيقه

على الخط المستقيم

(١٨) المطلوب تطبيق هذا الارتباط التقريبي على حل مسألتى (٧) و (٨)

وشرح عدم ضبط ثانيتهما

(١٩) المطلوب اثبات أن القانونين لـ ٦ لـ ٣ ليسا أضبط من القانون لـ ١  
إذا كان ح محسوبا من القانون التقريبي ١٦ ح = ١٠ ح - ح

(٢٠) إذا كان ح = ١٢ مترا ٦ ح = ٤٨ مترا فالمطلوب حساب ح  
من القانون المضبوط وهو ح = ح ÷ (٢ ح + ح) ثم إيجاد طول  
القوس باستعمال القوانين الثلاثة لـ ٦ لـ ٦ لـ ٦

(٢١) المطلوب إيجاد الزاوية المركزية من الدائرة التي قوسها هو المذكور  
في المسألة السابقة وإيجاد نصف قطر الدائرة مع حساب طول القوس من  
القانون القوس = ن هـ

(٢٢) المطلوب إيجاد طول القوس الذي في المسألة ٢٠ بالطريقة المشروحة  
في بند ٢٣ أى من القانون

$$\text{القوس} = ط (م + م) - \frac{1}{2} (٨ ح - ح) \\ (٢٣) \text{المطلوب بيان أن } \frac{1}{2} ح + \frac{1}{2} ح = ٤ ن$$

$$(٢٤) \text{المطلوب بيان أن } \frac{1}{2} ح + \frac{1}{2} ح = \frac{1}{2} ح$$

$$(٢٥) \text{المطلوب بيان أن } ح ح = ح ن$$

(٢٦) المطلوب بيان أن نهاية مقدار النسبة هـ : ح حينما يكون القوس  
صغيرا هي ١

(٢٧) إذا كان وتر القوس يساوى وتر نصف القوس (= ح) فالمطلوب  
بيان أن القوس يساوى ٢,٤٢ ح تقريبا

(٢٨) إذا كان كل من الوتر والسهم متساويين (= ح) فالمطلوب بيان  
أن نصف القطر يساوى ٨ ح وان القوس يساوى بالتقريب ٢,٧٧ ح

- (٢٩) اذا حدد قوس مخصوص زاوية مركزية مقدارها  $١٠٠^\circ ٢٥٧'$  فالمطلوب بيان طول القوس حينما يكون نصف القطر مساويا مترا واحدا
- (٣٠) اذا كان سهم قطعة ٨ أمتار وسهم القطعة التي تتم الدائرة ٣ أمتار فالمطلوب إيجاد طول قوس كل من القطعتين
- (٣١) وتر قوس يساوى ٤٠ مترا وسهمه ٨ أمتار والمطلوب إيجاد نصف قطر الدائرة ومقدار الزاوية المركزية المحصورة بهذا القوس
- (٣٢) المطلوب إيجاد طول القوس في المسألة السابقة باستعمال القانون ١، ومقارنة الناتج بحاصل الضرب بـ هـ
- (٣٣) المطلوب إيجاد الزاوية المركزية اذا كان سهم القوس يساوى سدس نصف قطر الدائرة

- (٣٤) سهم قطعة من دائرة نصف قطرها ١٥ مترا يساوى ٣ أمتار والمطلوب إيجاد المحيط الكلى للقطعة (أى القوس والوتر)
- (٣٥) حوض على شكل جزء اسطوانى طوله ٩٠ سنتيمترا وقطره ٥٠ سنتيمترا ومحوره أفقى ملئ بالماء الى ارتفاع قدره ٢٠ سنتيمترا والمطلوب حساب مساحة الجزء المغمور بالماء من السطح المنحنى للأسطوانة

- (٣٦) منحنى سكة حديد نصف قطره ٥٠٠ متر وزاويته  $٤٥^\circ$  فما طول ذلك المنحنى



#### ٢٤ - مساحة القطاع الدائرى

يمكن اعتبار القطاع الدائرى مكونا من مثلثات متساوية الساقين ضيقة وقواعدها تكون قوس القطاع وارتفاعاتها كلها مساوية لنصف القطر (أنظر الشكل الأيسر من بند ٢٥)

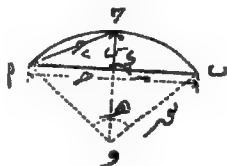
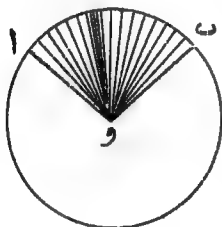
واذن فالمساحة تساوى  $\frac{1}{2}$  القوس  $\times$  نصف القطر  
والقوس المكوّن لقاعدة القطاع =  $\pi$  هـ وفى هذا القانون هـ هو  
التقدير الدائرى لزاوية القطاع  
واذن تكون مساحة القطاع =  $\frac{1}{2} \pi$  هـ

وفى حالة مخصوصة تكون مساحة جميع الدائرة =  $\frac{1}{2}$  المحيط  $\times$  نصف  
القطر =  $\pi$  هـ

وفى هذا القانون  $\pi = \frac{22}{7} (1 - 10^{-4}) = 3,1416$  تقريبا

٢٥ — مساحة القطعة الدائرية

ان القطعة أ ح ب وهى الفرق بين القطاع أ ب ح والمثلث أ ب و



واذن تكون مساحتها مساوية الى

$$\frac{1}{2} \pi (هـ - حاه)$$

فاذا علم السهم والوتر من قطعة أو علم وتر القطعة ووتر نصف قوسها فبقدارا  
 $\pi$  هـ يمكن حسابهما كما تقدم بيانه والمعادلات التى تستعمل هى

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \pi + \frac{2}{3} \frac{هـ}{\pi} = \pi \\ \frac{1}{2} \pi = \frac{2}{3} \frac{هـ}{\pi} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ جتا} \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ چقا} \end{cases}$$

ان حساب ب 6 هـ لأجل استعمال القانون  $\frac{1}{4}$  ب 2 (هـ - حاه) في تعيين المساحة متعب نوعا وفي كثير من الأحوال العملية يستحسن استعمال قانون تقريبي لتعيين المساحة مشتمل على الكيات ح 6 س 6 ج 6 ج 6 س

وهناك كثير من القوانين التقريرية وبعضها يعطى نتائج مضبوطة جدا أدق  
في الحقيقة من القانون المضبوط للأقواس التي فيها  $\pi$  صغير جدا بالنسبة  
لمقدار  $h$  وذلك لأنه في حالة استعمال القانون المضبوط حينما يكون الكسر  
 $\frac{\pi}{h}$  صغيرا جدا ويكون بناء على ذلك مقدار  $h$  صغيرا أيضا يكون كل من  
 $h$  و  $6$   $h$  متساويين تقريبا ولذا يحتاج الى دقة عظيمة في تعيين  
 $h$  و  $6$   $h$  ليكون مقدار الفرق بينهما مضبوطا نوعا

وفي هذه الأحوال تكون القوانين التقريبية هي الأنق وبعضها قد يكون دقيقا للغاية

(١) وأول تقريب غير مضبوط يتحصل باستعمال قانون ميمسون الذي يعطى مقدار الارتفاع المتوسط للقطعة مساويا الى  $\frac{2}{3}$  من الارتفاع الأعظم هو في الوسط ويساوى السهم وعلى ذلك يكون القانون المستتبع من ذلك هو

مساحة القطعة =  $\frac{1}{2} \times$  الوتر

(٢) وهالك قانون آخر أقل ضبطا الا أنه يستحق الذكر اذ بمزجه بالقانون السابق يتحصل قانون مضبوط ضبطا لا بأس به حتى في حالة نصف الدائرة وهذا القانون التقريبي هو

$$\text{مساحة القطعة الصغيرة} = \frac{2}{3} \text{ سم} \times \text{القوس}$$

(٣) فاذا استخرج قانون من هذين القانونين السابقين بأخذ  $\frac{1}{10}$  من القانون الأول و  $\frac{2}{3}$  من القانون الثاني فان الناتج يكون مضبوطا الى جزء من ١٧٠ جزءا حتى في حالة ما تصل القوس الى نصف محيط الدائرة وهذا القانون هو

$$\text{المساحة} = \frac{2}{3} \text{ سم} \times \frac{7}{10} + \frac{2}{3} \text{ قوس}$$

(٤) اذا أخذ طول القوس مساويا الى  $\frac{1}{3}$  (٨ ح - ح) فاننا نحصل على القانون

$$\text{المساحة} = \frac{1}{10} \text{ سم} (6 \text{ ح} + 8 \text{ ح})$$

والخطأ في هذا القانون هو واحد من مائة في نصف الدائرة ويتناقص خطاه بسرعة عظيمة في القطع الصغيرة وهناك قانونان آخران مذكوران في بند ٢٨

## ٢٧ - اثبات القوانين المذكورة

[يحتاج الاثبات لمعرفة هذين القانونين

$$1 \text{ ح} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{5} + \frac{7}{7} + \dots$$

$$6 \text{ ح} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{4}{4} - \frac{6}{6} + \frac{7}{7} + \dots$$

ومقدار ١ معين بالتقدير الدائري]

فالقانون المضبوط للساحة

$$= \frac{1}{4} \text{ نى}^2 (\text{هـ} - \text{حـ هـ})$$

$$= \frac{1}{4} \text{ نى}^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{5} + \frac{7}{7} - \frac{7}{7} \right) \cdot (0.00 - \frac{7}{7})$$

وقانون  $\frac{2}{3}$  مـ  $\times$  الوتر

$$= \frac{2}{3} (\text{نى} - \text{نى حـ حـ} \frac{7}{3}) \cdot 2 \text{ نى حـ حـ} \frac{7}{3}$$

$$= \frac{2}{3} (2 \text{ حـ حـ} \frac{7}{3} - \text{حـ هـ})$$

وهذا القانون يؤول الى

$$= \frac{1}{4} \text{ نى}^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{5} + \frac{7}{7} - \frac{7}{7} \right) \cdot \frac{21}{11} + \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$$

فيكون هذا القانون أقل من الحقيقة بالمقدار

$$\left( \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{5} - \frac{7}{7} \cdot \frac{5}{11} + \frac{7}{7} \cdot 0.00 \right) \text{ نى}^2$$

وقانون  $\frac{2}{3}$  هـ  $\times$  القوس

$$= \frac{2}{3} \text{ نى}^2 (1 - \text{حـ حـ} \frac{7}{3}) \text{ هـ}$$

وهذا يؤول الى

$$= \frac{1}{4} \text{ نى}^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{5} + \frac{7}{7} - \frac{7}{7} \right) \cdot \frac{8}{11} + \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{11} - \frac{2}{3}$$

وانذ فيكون أكبر من الحقيقة بقدر

$$\left( \frac{7}{14} \cdot \frac{5}{5} - \frac{7}{7} \cdot \frac{8}{11} + \frac{7}{7} \cdot 0.0 \right) \text{ نى}^2$$

والقانون المتحصل بمزج هذين القانونين بالنسبة التي هي  $٧$  وتر  $+ ٣$  قوس  $\frac{١}{١٠}$  هو صحيح لحد  $هـ$  وأصغر من الحقيقة بقليل ومقدار النقص فيه هو

$$\frac{٣}{١٦٠} \cdot \frac{٧}{٧} - \text{قوى هـ الأعلى من القوة السابعة}$$

والقانون المؤسس على هذا والمستتج بوضع  $\frac{١}{٢}$  (٨ ح - ٢ ح) للقوس هو أقل ضبطا بقليل لأن  $\frac{١}{٢}$  (٨ ح - ٢ ح) أقل من الحقيقة بقليل إلا أنه مع هذا يكون الضبط عظيما جدا في الأقواس التي هي أقل من نصف المحيط

ملحوظة - من المعلوم أنه حينما لا يكون مقدار هـ أقل من الوحدة لا يكون من الواضح أن القانون الذي يخالف القانون الصحيح في القوى العليا للكمية هـ فقط أدق من القانون الذي يتبدى في الاختلاف عن الحقيقة في القوى الصغرى للكمية هـ وليس هذا هو الحال على الدوام في الواقع إلا أنه إذا كان هذا القانون مضبوطا بالنسبة لمقدار معين للزاوية هـ فإن هذا الضبط يكون أعظم بالنسبة للقادير الصغرى للكمية هـ وستجرب دقة هذه القوانين المختلفة في حالة نصف الدائرة بحساب المساحة المعينة بكل قانون من هذه القوانين ثم المعينة بالقانون المضبوط ثم تقارن النتائج

ففي هذه الحالة يكون

$$\frac{٢}{٣} \text{ سم} \times \text{الوتر} = \frac{٤}{٣} \cdot \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٣} \cdot \frac{١}{٢} \times ١,٣٣٣٣ \times \frac{١}{٢}$$

$$\frac{٢}{٣} \text{ سم} \times \text{القوس} = \frac{٢}{٣} \cdot \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٣} \cdot \frac{١}{٢} \times ٢,٠٩٤٤ \times \frac{١}{٢}$$

$$\frac{٧}{١٠} (١,٣٣٣٣ \times \frac{١}{٢}) + \frac{٣}{١٠} (٢,٠٩٤٤ \times \frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢} \times ١,٥٦١٧$$

$$\frac{١}{١٥} \text{ سم} (٦ ح + ٨ ح) = \frac{١}{١٥} \times ١,٥٥٤٢$$

$$\text{القانون المضبوط} = \frac{١}{١٥} \times ١,٥٧٠٨$$

فالقانون  $\frac{2}{3}$  من  $\times$  القوس غير مضبوط بالمرة لقوس كبير كهذا إلا أنه يفيد في تصحيح القانون  $\frac{2}{3}$  من  $\times$  الوتر والطول الصحيح اللازم لأن يضرب فيه  $\frac{2}{3}$  من أطول من الوتر وأقصر من القوس ومقداره التقريبي هو

$$\text{الوتر} + \frac{2}{3} \text{ زيادة القوس على الوتر}$$

والخطأ في القانون المصحح بموجب ذلك هو ١ من ١٥٠ في حالة نصف الدائرة

٢٨ = وعلاوة على هذه القوانين فهناك قانون فيه  $\frac{2}{3}$  من مضروبا في خط طوله قريب جدا على قدر الامكان من الطول المطلوب محصورين بالوتر والقوس وهذا القانون هو

$$\text{المساحة} = \frac{2}{3} \text{ من } \frac{1}{2} \times \frac{8}{5} + \frac{2}{3}$$

وهو قانون مضبوط جدا بالنسبة للأقواس الصغيرة والخطأ فيه يساوى ١ من ٢٠٠ في نصف المحيط وهناك تعديل لهذا القانون يستحق الالتفات وفيه خطأ يبلغ نحو ١ من ٨٠٠ في نصف المحيط وهو مضبوط جدا بالنسبة للأقواس الصغيرة إلا أنه أقل ضبط من القانون المضبوط السابق ذكره وذلك القانون هو

$$\text{المساحة} = \frac{2}{3} \text{ من } \frac{1}{2} \times \left( \frac{5}{4} \text{ من } \frac{5}{4} \right) + \frac{2}{3}$$

فإذا أخذت نقطة  $\epsilon$  أى  $\epsilon$  على  $\epsilon$  بحيث يكون  $\epsilon = \frac{5}{8}$  و  $\epsilon$  أى يكون  $\epsilon$  فى الشكل  $\epsilon = \frac{5}{4}$  و  $\epsilon$  فإن الخط  $\epsilon$  ف يصير مساويا الى  $\frac{1}{2} \times \left( \frac{5}{4} - \frac{5}{4} \right) + \frac{2}{3}$  وبناء على القانون المذكور قبلا تكون مساحة القطعة  $\epsilon$  ب  $\epsilon$  مساوية بالتقريب جدا الى  $\frac{2}{3}$  من  $\epsilon$  أو  $\frac{4}{3}$  من  $\epsilon$  الى

والفرق بين هذين القانونين ليس عظيماً لأن  $٨ \text{ سر} = ١٠٦٢٥ \text{ سر} = ٦$   
 $(\frac{٥}{٦} \text{ سر}) = ١٠٦٢٥ \text{ سر}$  وهذا الفرق يرجح جانب القانون الأصلي  
 في حالة ما تكون القطعة صغيرة إلا أنه يرجح جانب القانون المعدل في حالة  
 ما تكون القطعة كبيرة وهذا القانون الأخير أيضاً أسهل تطبيقاً في الأعمال  
 وذلك لأنه في كثير من الأحوال يكون الخط ١ ع أو ١ ف أو الخط المضاعف  
 ١ ع + ١ ب ممكناً قياسه بسهولة مثل سهولة قياس الخط ١ ب

واذن فالقانون  $\frac{2}{3} \times 1$  أسهل في الحساب من القانون

$$\sqrt[2]{5 \times 8} + \sqrt[2]{12 \times 3}$$

وفي القياس التقريبي في الأحوال التي يكون فيها  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  مضبوطاً مضبوطاً كافياً مع شدة الاحتياج لضبطاً كذا من المفيد ملاحظة أن هذه الدرجة

من الضبط يمكن الحصول

علیہا مجرد قیاس اب

شریطہ رخو بشرط آن

لا تكون رعاوته متجاوزة الحد

والطول ۱۷ + ۷ = ۲۴

هو في الحقيقة قياس ربح

للنظرة اب وهذه الخاوة

بترتب علیہا أن النقطة المتوسطة من الشريط يمكن دفعها الى نقطة ے

البعيدة عن أ ب بارتفاع مساو إلى  $\frac{5}{8}$  سهم القوس

٢٩ - امتحان دقة القانونين

$$\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} \approx \frac{2}{3} \quad 6 \quad \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} \approx \frac{2}{3}$$

كل من هذين القانونين هو بالصورة

$$\sqrt{\frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1} \sqrt{\frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1} \sqrt{\frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1} \text{ طأ } \frac{1}{4} \text{ هـ}$$

وهذا المقدار يساوى تقريبا

$$\frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1 \sqrt{\frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1} \text{ هـ} \\ \text{أو } \frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1 \left( \frac{1}{128} \text{ م هـ} + 1 \right)$$

وبمقتضى ما ذكر في بند ٢٧ يكون.

$$\frac{2}{3} \text{ سم ح} = \frac{1}{4} \text{ م هـ} \left( \frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1 - \frac{2}{3} \text{ سم ح} + 1 \right) + \dots \dots$$

وهذا المقدار اذا ضرب في  $1 + \frac{1}{128} \text{ م هـ}$  فان معامل  $\frac{1}{4} \text{ م هـ}$  يصير مساويا  $\frac{220}{128} - \frac{2}{3}$

والقانون الصحيح يستدعى أن يكون هذا المعامل مساويا الى ١ - (بند ٢٧) واذن فيلزم أن يكون مقدار م محققا لهذه المعادلة

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{220}{128} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} = \frac{220}{128} - \frac{2}{3}$$

وعلى ذلك يكون القانون الأول صحيحا لغاية مقدار هـ والثاني قريبا من ذلك الا أنه ليس تام الضبط فاذا كان  $\frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} \right) = \frac{220}{128} - \frac{2}{3}$  فقدار  $\frac{220}{128} - \frac{2}{3}$  هو  $\frac{2}{3} - 1$  بدلا من  $1 - \frac{2}{3}$  واذن ففي المقادير الصغيرة للزاوية هـ يكون المقدار الذى يعطيه هذا القانون الثانى أقل من الحقيقة بمقدار  $\frac{2}{3} - 1$  من  $\frac{1}{4} \text{ م هـ}$  وهذا خطأ نسبي يساوى  $\frac{2}{1024}$  واذن فليس له أهمية عظيمة





واذن فتكون مساحة الدائرة =  $\frac{1}{2} ط (س + س')$

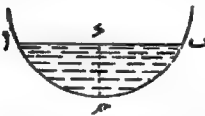
ومساحة القطعة أ ح ب =  $\frac{4}{3} س' - \frac{1}{2} ط \frac{1}{2} ح + \frac{2}{3} س'$

وتكون المساحة المطلوبة =  $\frac{1}{2} ط (س + س') - \frac{4}{3} س' + \frac{1}{2} ط \frac{1}{2} ح + \frac{2}{3} س'$

وهذه الطريقة الثانية ربما كانت أسهل من الأولى وهى أيضا أضيف متى كان ح أقل من س وذلك لأنه اذا كان ح أقل من س فانه يكون أقل من  $\frac{1}{2} ح$  ومتى كان أقل من  $\frac{1}{2} ح$  فالقطعة أ ح ب تكون أقل من القطعة التى قاعدتها  $\frac{1}{2} ح$

### ٣١ - العمق الايدروليكي المتوسط

وهناك كمية مهمة مرتبطة بمسائل حركة المياه فى الترع والمواسير وتلك الكمية هى النسبة بين مساحة القطاع العرضى للاء الى طول المحيط المنغور من ذلك القطاع العرضى وهذه النسبة تسمى العمق الايدروليكي المتوسط أو نصف القطر الايدروليكي ويرمز لها عادة بالرمز م



وهذا الاسم الاصطلاحي صحيح مهما كان شكل القطاع العرضى الا أنه بما أن القطاع العرضى للمواسير هو مستدير عادة فيرى أنه من الموافق أن تدخل الاصطلاح فى مسألة مساح و أقواس القطع الدائرية

$$\frac{\text{مساحة القطعة أ ح ب}}{\text{طول القوس أ ح ب}} = \text{م}$$

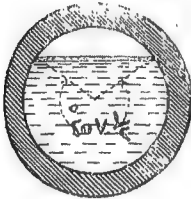
واذن فيكون مقدار م طولا لو ضرب فى طول القوس فانه يعطى المساحة وحينما يكون العمق م =  $\frac{2}{3} س$  تقريباً لأن  $\frac{2}{3} س$  × القوس يساوى المساحة تقريباً فى حالة ما تكون القطعة صغيرة كما تقدم

وعلى وجه العموم

$$\frac{\text{مساحة القطعة}}{\text{طول القوس}} = \frac{\frac{1}{2} \text{ نى (هـ - حاه)}}{\frac{1}{2} \text{ نى (١ - حاه)}} = \text{م}$$

$$\text{واذن تكون} \quad \text{م} = \frac{1}{2} \text{ نى (١ - حاه)}$$

ويصل نصف القطر الايدروليكي (أو العمق الايدروليكي المتوسط) نهايته العظمى حينما تكون الزاوية المركزية المحددة بالقوس المغمور  $\frac{1}{2} ٢٥٧$  وفي هذه الحالة يكون الجزء الممتلئ من الماسورة نحو سبعة أثمانها



وسرعة تحرك الماء داخل الماسورة الموضوعة على انحدار معلوم مناسبة للجذر التربيعي لنصف القطر الايدروليكي ويبلغ نهايته العظمى بناء على ذلك حينما يكون ممثلاً من الأنبوبة نحو سبعة أثمانها

### ٣٢ - قانون تقريبي لتعيين نصف القطر الايدروليكي

وفي حساب نصف القطر الايدروليكي حينما يكون كل من وتر القوس وسهمه معلومين أو حينما يعلم وتر القوس ووتر نصفه يمكن الحصول على قانون مضبوط جداً باستعمال القانونين

المساحة =  $\frac{1}{2} \text{ سـ (٨ ح + ٦ ح)}$  والقوس =  $\frac{1}{2} (٨ ح - ٦ ح)$   
وكل من هذين القانونين أقل بقليل من المقدار الحقيقي وقد يتفق أن خارج قسمتهما يكون مضبوطاً مضبوطاً عظيماً والقانون الذي يتحصل بهذه الكيفية هي

$$\text{م} = \frac{\frac{1}{2} \text{ سـ (٨ ح + ٦ ح)}}{\frac{1}{2} (٨ ح - ٦ ح)} \times \frac{1}{2}$$

والخطأ في حالة نصف الدائرة يزيد قليلا جدًا عن ١ من ١٠٠٠  
والخطأ في حالة ما تكون  $h = ٢٤٠$  وهي الحالة التي يكون فيها وتر  
القوس مساويا لوتر نصفه هو نحو ١ من ٢٠٠ وفي القطع الدائرية التي هي  
أكبر يزيد الخطأ تدريجيا في أول الأمر الى أن يصل الى ٢٠ في المائة  
في الدائرة التامة وبناء على ذلك يجب أن لا يستعمل القانون في القطع التي فيها  
ح ينقص بكثير عن ح وفي هذه الأحوال اذا وجدت الجداول فمقدار  
ب ٦ هـ يجب أن يعين بالحساب ثم يستعمل القانون المضبوط ب ١ ب  
 $\left[ ١ - \frac{ح}{هـ} \right]$  واذا لم توجد الجداول فيجب أن نحسب ب ٦ سـ ٦ حـ  
مع استعمال القانون

$$م = \frac{\text{مساحة الدائرة} - \text{مساحة القطعة المكحلة}}{\text{المحيط} - \text{القوس المكل}}$$

وفي إيجاد مساحة القطعة المكحلة ربما يكون الأحسن استعمال القانون  
 $\frac{١}{١٥}$  السهم (٧ الوتر + ٣ القوس) وذلك لأن القوس يجب أن يحسب لأجل  
تعيين مقام الكسر

### تمرينات (٣)

- (١) المطلوب بيان أن مساحة نصف دائرة نصف قطرها متر واحد  
محسوبة من القانون  $\frac{٢}{٣} سـ ٢ ح + \frac{٨}{٥} سـ ٢$  هي ١,٥٧٧٦ مترا مربعا وأن  
هذه المساحة محسوبة من القانون  $\frac{٢}{٣} سـ ٢ ح + \left( \frac{٢٥}{٤} \right) سـ ٢ = ١,٥٧٢٣$   
مترا مربعا وأن المساحة الحقيقية  $= ١,٥٧٠٨$  مترا مربعا وبيان أن الخطأ  
النسبي في النتيجة الأولى هو نحو ١ من ٢٠٠ بينما الخطأ في الثانية هو ١ من ٨٠٠
- (٢) سهم قوس يساوي ١٠ سنتيمترات والطول أ ٤ + ٤ ب  
يساوي  $\frac{١}{٣} ٢٣$  سنتيمترا والمطلوب حساب المساحة الى أقرب سنتيمتر مربع



(١١) المطلوب إيجاد النسبة بين الوتر والسهم لقطعة دائرية حينما تكون الزاوية المركزية هـ المحيطة بالقوس  $\frac{1}{4} ٢٥٧^\circ$

(١٢) المطلوب إيجاد النسبة بين وتر القطعة المذكورة في المسألة السابقة ونصف قطر الدائرة

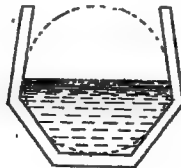
(١٣) المطلوب إيجاد نصف القطر الإيدروليكي م حينما تكون الزاوية هـ  $\frac{1}{4} ٢٥٧^\circ$

(١٤) اذا كان الماء يسيل بالاستمرار في ماسورة اسطوانية نصف قطرها م ذات انحدار قليل فالمطلوب إيجاد مقدار م (١) حينما تكون الماسورة مملوءة الى النصف (٢) حينما تكون ممتلئة امتلاء تاما

(١٥) ان مقدار الماء الذي يصرفه مجرى على انحدار معين مناسب للمساحة أ للقطاع العرضي للماء مضروبا في  $\sqrt{م}$  ففي المواسير السابق ذكرها المطلوب إيجاد أ  $\sqrt{م}$  (١) حينما تكون المواسير ممتلئة الى النصف (٢) حينما تكون المواسير مملوءة ملاء تاما

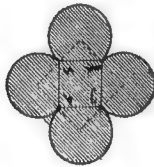
(١٦) المطلوب إيجاد مقدار أ  $\sqrt{م}$  في المواسير المذكورة حينما يكون مقدار م نهاية عظمى أى حينما تكون زاوية هـ  $\frac{1}{4} ٢٥٧^\circ$

(١٧) المطلوب إيجاد مقدار أ  $\sqrt{م}$  حينما يكون هـ  $= ٣٠.٨^\circ$



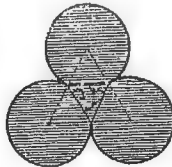
(١٨) القطاع العرضي لمجرى ماء هو على شكل كثير الأضلاع ممكن رسمه حول دائرة والمطلوب بيان أنه اذا كان الماء فيه بارتفاع مركز تلك الدائرة فان نصف القطر الايدروليكي يساوى  $\frac{1}{2}$  نصف قطر الدائرة

(١٩) المطلوب ايجاد نصف القطر الايدروليكي حينما تكون المسورة الاسطوانية التي نصف قطرها متر واحد ممثلة الى ٨٥ سنتيمترا



(٢٠) المطلوب ايجاد حجم عمود مبنى من الحجر بارتفاع ٦ أمتار اذا كان قطاعه العرضي كما هو مبين بالرسم وكان ضلع المربع الداخل ٣٠ سم. وكانت القطع الدائرية متماسة في النقطة ١ ب ٦ ب ٦ ح ٦ و

(٢١) المطلوب ايجاد حجم عمود من الحجر ارتفاعه ٦ أمتار وقطاعه العرضي كما هو مبين بالرسم وضلع المثلث المتساوي الأضلاع ١ ب ح = ٣٠ سنتيمترا والقطع الدائرية متماسة في ١ ب ٦ ب ٦ ح



(٢٢) المطلوب إيجاد طول قوس قطعة دائرية سهمها ٦ سنتيمترات ووترها ٢٠ سنتيمترا

(٢٣) المطلوب إيجاد مساحة القطعة المذكورة ونصف قطرها الإندروليكي

(٢٤) المطلوب إيجاد نصف القطر الإندروليكي لهذه القطعة من القانون

$$m = \frac{1}{4} \pi \left( 1 - \frac{h}{a} \right)$$

(٢٥) المطلوب بيان أنه إذا كانت زاوية  $h$  صغيرة فإن  $1 - \frac{h}{a}$

$$= \frac{4}{\pi} (1 - \frac{h}{a}) \text{ مع استنتاج القانون التقريبي } m = \frac{2}{\pi} h$$

(٢٦) المطلوب بيان أنه في القطع الدائرية الصغيرة جدًا يؤول القانون

$$m = \frac{1}{5} \frac{h^2 + \frac{1}{2} h^2}{1 - \frac{h}{a}} \text{ إلى } m = \frac{2}{\pi} h$$

(٢٧) المطلوب حساب الخطأ في القانون  $m = \frac{1}{5} \frac{h^2 + \frac{1}{2} h^2}{1 - \frac{h}{a}}$

في حالة نصف الدائرة

(٢٨) قوس قطعة دائرية يساوي ٥ أمتار ووتره يساوي ٤ أمتار فما مساحة القطعة

(٢٩) قوس قطعة دائرية يساوي ٨ أمتار ووتره يساوي ٤ أمتار فما مساحة

القطعة

(٣٠) المطلوب إيجاد القطاع العرضي الداخلي لماسورة اسطوانية من

الحديد سمكها سنتيمتر واحد وطول محيطها الظاهر ٢٠ سنتيمترا

(٣١) ما هو المقدار اللازم طرحه من  $\frac{2}{\pi} h$  لأجل إيجاد مساحة قطاع

دائري لماسورة حينما يكون  $h$  هو المحيط الخارجى ويكون المطلوب إيجاد

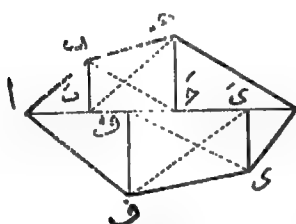
المساحة الداخلة مع فرض أن السمك يساوى  $m$

(٣٢) المطلوب تطبيق نتيجة مسألة ٣١ على حل مسألة ٣٠

## مقاسات الأراضي

### (١) مساح المضلعات

٣٣ — لنبدأ بفرض مضلع  $ا ب ح د ع ف$  له قطر طويل  $ا د$



كما هو موضح في الشكل

فنزل الأعمدة من نقط رؤوس

الشكل على  $ا د$  ونقيس طول  $د$

كل عمود وبعد موقع كل عمود

عن نقطة  $ا$

فساحة الشكل هي مجموع

مساح المثلثات وأشباه المنحرفات التي ينقسم إليها الشكل بهذه الصورة  
فبالمقاسات المأخوذة نتمكن من حساب هذه المساح

فثلا ليكن	$ا ب = ٢٥$	مترا	$ب د = ٢٠$	مترا
٦	$ا ف = ٤٠$	»	$ب ف = ٣٥$	»
٦	$ا ح = ٦٠$	»	$ح د = ٣٠$	»
٦	$ا ع = ٩٠$	»	$ع د = ٢٥$	»
٦	$ا د = ١١٠$	»		

فساحة المثلث  $ا ب د = \frac{1}{2} (٢٠ \times ٢٥) = ٢٥٠$  مترا مربعا

ومساحة شبه المنحرف  $ب ح د = \frac{1}{2} (٢٥ + ٦٠) (٣٠ - ٢٠) = ٨٧٥$

ومساحة المثلث  $ح د ع = \frac{1}{2} (٦٠ - ١١٠) (٣٠ \times ٣٠) = ٧٥٠$

» »  $ا ف د = \frac{1}{2} (٣٥ \times ٤٠) = ٧٠٠$

ومساحة شبه المنحرف  $ف ع د = \frac{1}{2} (٢٥ + ٣٥) (٩٠ - ٤٠) = ١٥٠٠$

» ومساحة المثلث  $ب ع د = \frac{1}{2} (٩٠ - ١١٠) (٢٥ \times ٢٥) = ٢٥٠$

» واذن تكون جملة المساحة =  $٤٣٢٥$



وينبغي أن يلاحظ أن جميع المسامخ التي فرق ١ و ٤ هي التي شرع في حسابها أولاً ثم حسب المسامخ التي تحت الخط المذكور مع البدء من نقطة ١ في كل حالة

ويمكن أن يدخل إلى الحساب بعض الاختصار (١) بتأجيل القسمة على ٢ التي كانت لازمة في كل حالة إلى آخر العملية أي بأن يحسب ضعف المساحة أولاً ثم يقسم المجموع على ٢ (٢) بقسمة كل شبه منحرف إلى مثلثين وملاحظة أن المساحة التي فوق ١ و تساوي مجموع المثلثين ١ ب ح ٦ ب ح و والمساحة التي تحت ١ و تساوي مجموع المثلثين ١ ف ي ٦ ف ي و (وبالبحث ينتج ذلك مباشرة من التساوي بين المثلثين المتحددين في القاعدة والذين رؤوسهما على خط واحد مواز للقاعدة)

وبهذه الطريقة تكون المساحة مساوية لمساحة الأربعة المثلثات بدلا من مجموع الستة الأشكال التي بعضها مثلثات وبعضها اشباه منحرفة

واذن فيكون إجراء العملية كما يأتي :

ضعف مساحة كل من المثلثات

$$١ ب ح = ١ ح ٦ \times ب ب = ٦٠ \times ٢٠ = ١٢٠٠ \text{ متر مربع}$$

$$٦ ب ح د = (١ ب - ١ ح) \times ح د = (١١٠ - ٢٥) \times ٣٠ = ٢٥٠٠$$

$$٦ ا ف ي = ١ ف ي \times ف ف = ٩٠ \times ٣٥ = ٣١٥٠$$

$$٦ ف ي د = (١ ف - ١ ح) \times ف ي = (٤٠ - ١١٠) \times ٢٥ = ١٧٥٠$$

$$\frac{٨٦٥٠}{٢}$$

$$\text{المساحة الكلية} = ٤٣٢٥ \text{ متر مربع}$$

٣٤ — واخط ١ و الذى تقاس جميع الأعمدة منه يسمى القاعدة والأعمدة تسمى الرأسيات أو الاحداثيات الرأسية وطريقة القياس التى يستعملها المساح فى دقتره المسمى دقتر الغيط هى كما يأتى

تقاس المسافات من مبدأ نقطة ١ على طول خط القاعدة الواقعة عليه الأعمدة وترقم تلك الأبعاد فى العمود الأوسط والرأسيات فى كل من الجانبين توضع فى العمود الخارج المناظر أى أن الأعمدة المقاسة من جهة اليسار توضع فى العمود الأيسر والأعمدة المقاسة من جهة اليمين توضع فى العمود الأيمن على هذه الصورة

والأفضل أن يكون هكذا				متر	
				الى نقطة و	
	٥	الى		١١٠	
	١١٠	١١٠		٠٩٠	ى ٢٥
		٩٠	٢٥	٠٦٠	ح ٣٠
ح ٣٠	٦٠		ى ٢٥	٠٤٠	ف ٣٥
		٤٠		٠٢٥	
ب ٢٠	٢٥				
	١	من			من نقطة ١

ومن المقاسات الموضحة فى دقتر الغيط يمكن رسم المضلع ومزيرة الطريقة الموضحة فى الشكل الثانى أن المساح يمكن حسابها مباشرة لو أريد فى دقتر الغيط وذلك بحسب الطريقة الموضحة بعد

ضعف المساحة	مضارب					مضارب	ضعف المساحة
			الى	س			
			١١٠	١١٠			
١٧٥٠	٧٠	٢٥	٠٩٠				
				٦٠	٣٠	٨٥	٢٥٥٠
٣١٥٠	٩٠	٣٥	٤٠				
				٢٥	٢٠	٦٠	١٢٠٠
٤٩٠٠			١	من			
منقول من اليمين	٣٧٥٠						٣٧٥٠
	٢ ÷ ٨٦٥٠						

المساحة الكلية = ٤٣٢٥ مترا مربعا

والمضارب الميمنة بالعمود الخاص بها قد حصلت كما يأتي

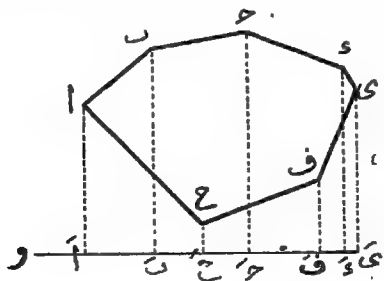
فالمساحة الواقعة فوق ١ س المناظرة للأعمدة التي في الجهة اليمنى من دفتر الغيظ هي مجموع المثلثين ١ ب ح ٦ ب ح ٥ ح ٥ وضعف المساحة ١ ب ح = (١ ح - ٥ ح) ب ب وضعف المساحة ١ ب ح ٥ = (١ س - ١ ب) ح ح بحيث يكون مضروب كل عمود هو الفرق بين المقاس على القاعدة فوق العمود وتحت مباشرة أى ٦٠ - ٥ لأجل العمود الذى طوله ٢٠ مترا ٦ ١١٠ - ٢٥ للعمود الذى طوله ٣٠ وبمثل ذلك يكون ٩٠ - ٥ هو المضروب للعمود ٣٥ ٦ ١١٠ - ٤٠ هو المضروب للعمود ٢٥ ولم يبق من العمل إلا اتمام عملية الضرب وجمع الحواصل الناتجة ثم القسمة بعد ذلك على ٢ وهذه الطريقة ممكن تطبيقها على أى عدد من الأعمدة النازلة على خط قاعدة واحد



٣٦ - كيفية إيجاد مساحة أى شكل

### الطريقة الأولى

وفي مثل هذه الحالة التي فيها جميع الأعمدة في جهة واحدة ليس من المهم أن توضع الأعمدة في جهة مخصوصة من الجدول لأجل الحساب وأذن فنضع الأعمدة الخاصة بالمضلع الأكبر على اليسار والأعمدة الخاصة بالمضلع الأصغر





### الطريقة الثانية

ويمكن إعادة ترتيب ذلك بمحصر الحدود التي يضرب فيها كل عمودين قوسين إلا العوامل التي يضرب فيها ١، فإن الأحسن أن تكون مفصلة وبهذا الترتيب يتحصل بعد حذف الحدود المشتركة

$$\begin{aligned} \text{ضعف المساحة} &= ١ (ب - \bar{ب}) + ب (\bar{ج} - \bar{أ}) + ج (\bar{ق} - \bar{ب}) \\ &+ د (\bar{ع} - \bar{ج}) + ع (\bar{ف} - \bar{د}) + ف (\bar{ح} - \bar{ع}) \\ &+ ح (\bar{أ} - \bar{ف}) + أ (\bar{ح} - \bar{أ}) \end{aligned}$$

والمعامل المقابل لكل رأسى هو فرق بعد النقطة التالية والنقطة السابقة للنقطة التى رأسىها هو المطلوب إيجاد معاملها وليس معامل ١ خارجا عن هذه القاعدة الا أن الأول أن يعتبر على جزئين فالمجموع الجبرى لهذه العوامل يساوى صفرا أى أن مجموع العوامل السالبة يتعادل مع مجموع العوامل الموجبة وهذا الأمر الحقيقى يسمح بتحقيق ذى قيمة لمعرفة ضبط تكوين هذه العوامل والترتيب الآتى (المطبق على المثال السابق) يظهر أنه أحسن ترتيب لأجل تعيين مقدار المساحة

ضعف المساحة		عوامل	إبعاد قاسه		
سالب	موجب		على القاطعة من قطة ١	على القاطعة من قطة ٢	
متر مربع	متر مربع	متر	متر	متر	
	١٨٠٠	٣٠	٦٠	٠٠	١
	٥٩٥٠	٧٠	٨٥	٣٠	ب
	٧٢٠٠	٨٠	٩٠	٧٠	ج
	٣٣٧٥	٤٥	٧٥	١١٠	د
٦٥٠		١٠—	٦٥	١١٥	ع
١٩٥٠		٦٥—	٣٠	١٠٠	ف
١٠٠٠		١٠٠—	١٠	٠٥٠	ح
٣٠٠٠		٥٠—	٦٠	٠٠	أ
٦٦٠٠	١٨٣٢٥	٢٢٥ ±			
	٦٦٠٠				

$$٢ \div ١١٧٢٥$$

$$\text{المساحة الكلية} = ٥٨٦٢,٥٠ \text{ مترا مربعا}$$



وفي هذا المثال تكون جميع الرأسيات في جهة واحدة من القاعدة وجميع الأبعاد المقاسة على القاعدة تتزايد بالتدرج الى أن تصل الى نقطة ع ثم تتنازل ثانيا الا أنه في الأراضي غير المنتظمة ليس من الضروري أن تكون الأبعاد المقاسة على القاعدة تابعة لهذه الكيفية المنتظمة فاذا قطع خط القاعدة الأرض فان الرأسيات لا تكون جميعها في جهة واحدة وفي هذه الحالة الأخيرة يجب أن تعتبر الأعمدة في احدى الجهتين موجبة والتي في الجهة الأخرى سالبة

والمثال الآتي يوضح كل حالة من الحالتين الخصاصيتين  
المقيد في دفتر الغيط

الى ع	
١١٨٠	٧١٦ ع
٧٥٠	٤ ف
٧٢٦	١٠٦٥ د
٤٩٢	١٧٥ ح
٢١٨	١٠٠ هـ
١٧٩	٢٥٦ ب
٤٤	٤١٣ د
٠٠	٧٩ ا
من ٦	

وينبغي للطالب أن يرسم قطعة الأرض بمقتضى ما هو مقيد بهذا بمقياس رسم موافق فالحروف ا ب ٦ ب ٦ ح ٠٠٠٠ هـ تدل على الرؤوس المتوالية للضلع ولأجل إيجاد المساحة تتبع الطريقة الآتية بحسب ما سبق بيانه وهي

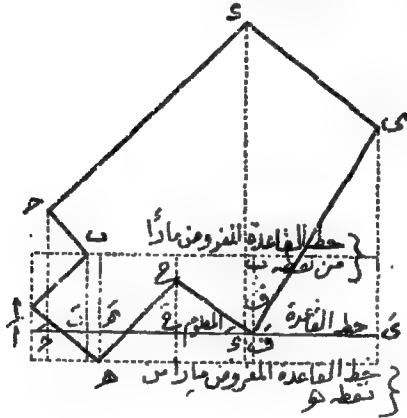
ضعف المساحة		المضاريب	الرأسيات	الأبعاد عن نقطة أمقاسة على خط القاعدة	
سالب	موجب				
	١٤١٤١	١٧٩	٧٩	٠٠	أ
	١١٢٦٤	٤٤	٢٥٦	١٧٩	ب
	٢٢٥٩١١	٥٤٧	٤١٣	٤٤	ج
	١٢٠٩٨٤٠	١١٣٦	١٠٦٥	٧٢٦	د
	١٧١٨٤	٢٤	٧١٦	١١٨٠	هـ
٢٧٥٢		٦٨٨—	٤	٧٥٠	و
٩٣١٠٠		٥٣٢—	١٧٥	٤٩٢	ز
	٤٩٢٠٠	٤٩٢—	١٠٠—	٢١٨	ح
١٧٢٢٢		٢١٨—	٧٩	٠٠	أ
١١٣٠٧٤	١٥٢٧٥٤٠	١٩٣٠ ±			
	١١٣٠٧٤				

٢-١٤١٤٤٦٦

المساحة الكلية = ٧٠٧٢٣٣ مترا مربعا

فاذا أخذت القاعدة خطا مارا بنقطة هـ وموازيا للقاعدة الأولى فانه يتخلص من الرأسى السالب الا أن ذلك يترتب عليه زيادة عمليات الضرب وتكون الرأسيات ١٧٩ ٣٥٦ ٥١٣ ٦ بدلا من ٧٩ ٢٥٦ ٤١٣ ٦٠٠ ويكون رأسى نقطة هـ مساويا للصفر بدلا من — ١٠٠ وينبغى للطالب أن يتم هذا المثال بفرض هذه الرأسيات الجديدة ومن المفيد أيضا في التمرن أن يأخذ خط القاعدة مارا من نقطة ب أو من نقطة ح وموازيا للقاعدة

الأصلية ويلزم أيضاً أن يرسم شكل الأرض باعتماد من المقاسات المعلومة فتكون هيئة الرسم كما هو موضح في الشكل التالي



#### تمارينات (٤)

المطلوب رسم المضلعات الآتية من واقع المقاسات المستخرجة من دفتر الضبط مع إيجاد هذه المسامح وملاحظة أن الرأسيات في كل حالة هي على الترتيب ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ وأن الأبعاد مقاسة في بعض الأحوال من نقطة (و) التي ليست نقطة من نقط المضلع

(١)	متر	(٢)	متر
الى س	٤٦٠		الى ح
٥٠ ح	٣٤٠	٨٠ س	١٠٠
	٢٠٠	١٠٠ ب	٧٥
١٠٠ ب	١١٠	٤١٦٠	من ا
	٧٠	٥١٢٠	
من ا	١		

(٣)		(٤)	
متر	متر	متر	متر
الى ٥	١١,٢٥	٥٠,٥٦	٢,٣٠
١٠,٠٠	٩,١٨	٧,١٥	٥,٣٦
٨,٤٠	٥,٣٦	٣,١٥	٠,٠
٦,٨٥	٠,٠	٠,٤٣	٠,٠
٥,٢١	٠,٠	٣,١٥	٠,٠
٢,٣٦	٠,٠		٠,٠
من ١	٠,٠		٠,٠

(٥)		(٦)	
متر	متر	متر	متر
الى ٥	١٣,٢٥	٧,٣٠	٤,٣٨٠
٩,٧٥	٧,١٥	٥,٢٥	٤,٣٨٠
٧,١٥	٦,٠٠	٣,٧٥	٤,٣٨٠
٦,٠٠	٣,٧٥	١,٢٠	٤,٣٨٠
٣,٧٥	١,٥٠	٠,٧٤	٤,٣٨٠
١,٥٠	٠,٠	٠,٧٤	٤,٣٨٠
٠,٠	٠,٠	٠,٧٤	٤,٣٨٠
من ٥	٠,٠	٠,٧٤	٤,٣٨٠

المطلوب حساب المساحة المحصورة بين خط القاعدة والحدود المعينة  
بالرأسيات في الأحوال الآتية والأبعاد معينة بالمتر

(٧)		(٨)		(٩)	
متر	متر	متر	متر	متر	متر
٤٨٦	٣٥	٤٣١	٠٠	٤٥٥	٠٠
٢٧٦	١٥	٤٢٣	١٦	٣٢٩	٢٠
٢١٨	١٣	٣٨٥	٢٨	٢٧٣	٣٠
١٨١	٢٢	٢٩٤	٤٧	١٤٨	١٠
١٣٨	٤٧	٢٠٨	٥٨	٤٣	٢١
٥٥	١٢٥	١٤٠	٥٥	٠,٠	٠,٠
٠,٠	١١٠	١٠	٤٢	٠,٠	٠,٠
من ٥	٠,٠	من ٥	٠,٠	من ٥	٠,٠

متر (۱۱)		متر (۱۰)	
متر	ال ل	ال ف	
	۱۰۰	۱۵۰	
۷	۹۵	۱۲۵	۱۹
۱۳	۸۵	۱۰۰	۳۲
۲۰	۷۵	۶۵	۱۵
۲۳	۶۵	۲۰	۳
۲۶	۵۵	من ا	
۳۰	۴۵		
۴۸	۳۵		
۵۲	۲۵		
۳۵	۱۵		
۲۱	۵		
	من ا		

(٢) المسامح المحمّدة بخطوط منحنية

٣٧ - في المباحث السابقة قد فرضنا أن الحدود مكونة من خطوط مستقيمة فإذا كان المحيط كله أو جزء منه متحيا فإن الجزء المتحني يمكن اعتباره مكونا من جملة خطوط مستقيمة قصيرة ثم استعمال الطرق السابقة لتحمين المساحة أو يستعان بطريقة سمبسون (أو بطريقة ودل أن أريد) وفي حالة رسم الأشكال على الورق مثل المنحنيات البيانية في الآلات البخارية فإنه يمكن استعمال طرق مخصوصة أبسط وفي بعض الأحيان قد تكون أضبط من طريقة سمبسون

٣٨ - حساب مساحة منحني مستو محصور بين مستقيمين

## متوازنين بطريقة سمبسون

لذلك يقسم الطول الكلي للنخى الى عدد زوجي من الأجزاء المتساوية العرض (ل) بخطوط مستقيمة موازية للخطين المتطرفين وتكون أطوال الخطوط القاسمة بما فيها الخطان المتطرفان هي ص 6 ص 6 ص 6 ...

فيناء على قاعدة سمبسون تكون مساحة الشكل هي

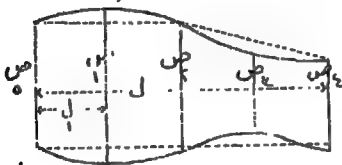
$$= \frac{1}{3} (ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + ص_٤ + ص_٥ + ص_٦) \times ل = \frac{1}{3} (ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + ص_٤ + ص_٥ + ص_٦) \times ل$$

$$= \frac{1}{3} (ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + ص_٤ + ص_٥ + ص_٦) \times ل$$

$$= \frac{1}{3} (ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + ص_٤ + ص_٥ + ص_٦) \times ل$$

$$= \frac{1}{3} (ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + ص_٤ + ص_٥ + ص_٦) \times ل$$

وعند الأجزاء أو العروض التي تقسم اليها المسامح يلزم أن يكون على حسب



تغير شكل المنحنى وما يرى  
للإنسان وقت الحساب  
والدقة المراد الوصول اليها  
ففي حالة الحاجة الى عناية  
عظيمة يمكن الحساب  
مرتين احدهما بحساب عدد

أكبر من الرأسيات المقاسة عن العدد الآخر فاذا اتفق المتوسطان (أو المساحتان)  
تقريباً فيمكن التعويل على الناتج

ففي هذا الشكل كان من الممكن أن نحسب في أول الأمر من المقدار

$$\frac{1}{3} (ص_١ + ص_٢ + ص_٣ + ص_٤ + ص_٥ + ص_٦) \times ل$$

أو تقاس الرأسيات الواقعة في وسط المسافة بين  
الرأسيات المبينة بالرسم ثم يطبق القانون على التسعة الرأسيات جميعها

### ٣٩ — طريقة الرأسيات الواقعة في الوسط —

#### طريقة أشباه المنحرف

إذا أريد حساب المساحة بطريقة أقل ضبطا فإنه يمكن حساب المتوسط بين الاحداثيات الفردية فقط أو الزوجية فقط بطرق مماثلة لما في بند ١٢٨ بشأن حساب القطاع العرضي المتوسط في حالة الأجسام والمتوسط المحسوب من الاحداثيات الفردية أو الواقعة في الوسط (المسماة بطريقة الاحداثيات الواقعة في الوسط) في شكل البند السابق هي

$$\frac{1}{4} (صم + صم)$$

والمتوسط المحسوب من الرأسيات الزوجية هو

$$\frac{1}{4} ( \frac{1}{2} صب + صم + \frac{1}{4} صم )$$

وهذه الطريقة الأخيرة معادلة لمعاملة المساحة كما إذا كانت مكونة من أشباه منحرفة كما هو موضح بالخطوط المنقطعة التي في الشكل وبما أن مساح هذه الأشباه المنحرفة هي  $\frac{1}{2} (صب + صم) + \frac{1}{4} (صم + صم)$  فقد تسمى أحيانا طريقة أشباه المنحرفات

وأولى هاتين الطريقتين هي أضبط غالبا فإن الضبط فيها ضعف الضبط في الطريقة الثانية إذا كانت طريقة سمسون مضبوطة ضبطا تاما ( أنظر بند ١٢٨ حيث نوقشت هناك مسألة الضبط النسبي في حالة القطاع العرضي للأجسام فكل ما قيل هناك ينطبق أيضا على الحالة التي نحن بصدددها والفرق إنما هو في أن القطاعات العرضية هي هنا خطوط بدلا من سطوح والمقدار الحاصل أخيرا هو مساحة بدلا من أن يكون حجما ) فإذا لم تكن قاعدة سمسون مضبوطة ضبطا تاما فمن المحتمل أن المتوسط الحاصل من الرأسيات

الواقعة في الوسط يكون أضبط من ناتج الطريقة الأخرى بأكثر من مرتين إلا أنه يحتمل أن يكون أقل ضبطاً من طريقة سمبسون وإذا أخذنا قطاعات عرضية عددها كاف فإن نقص الضبط يكون قليلاً على قدر الإرادة وسنشرح طريقة خاصة بالمنحنيات البيانية مؤسمة على طريقة سمبسون إلا أنها أدق منها وتلك الطريقة تؤدي إلى قانون مشابه لقانون الاحداثيات الرأسية الواقعة في الوسط وفي حالة الأشكال العديدة الانتظام بالمرّة نتبع طريقة الاحداثيات الواقعة في الوسط بأخذ جملة احداثيات لأن الطريقة الأخرى تصبح متعبة جداً (أنظر بند ٤٦)

### تمريعات (٥)

- (١) المطلوب حساب مساحة الشكل الآتي (١) بطريقة أشباه المنحرف
- (٢) بطرية الرأسيات الواقعة في الوسط (٣) بطريقة سمبسون — ورأسيات الشكل هي ١٣,٧ ١٤,٦ ١٥,١ ١٥,٣ ١٤,٩ ١٤,٢ ١٣,٧ متراً والأبعاد المتساوية بين الرأسيات هي ٣ أمتار
- (٢) المطلوب إيجاد مساحة الشكل نفسه بطريقة ودل

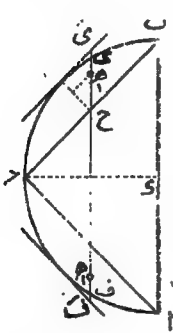
### المنحنيات البيانية

٤٠ — تعديل طريقة سمبسون بواسطة المماسات

وفي تطبيق طريقة سمبسون على جزء من المنحنى البياني يجب أن يقاس العرض الواقع في الوسط لامن المنحنيات بل من المماسات المرسومة بالتوازي لأوتار المنحنيات وعلى ذلك لا تكون مسافة العرض الواقع في الوسط المقاسة في الشكل الآتي لإيجاد المتوسط هي  $\frac{1}{2}$  ف الكثثة بين نقط المنحنى بل هي  $\frac{1}{2}$  ف الواقعة بين نقط المماسين المرسومين بالتوازي لوترى القوس الأعلى والأسفل على التناظر



وفي بعض الأحيان يكون الفرق بين القياسين غير مهم وحينما تكون نقط التماس على نهائى الاحداثى الرأسى الواقع فى الوسط فإن القياسين يكونان متساويين الا أنه فى الأحوال النهائية يكون التعديل السابق ذا أهمية عظيمة



فمثلا فى حساب مساحة نصف دائرة بتطبيق واحد لقاعدة سمسون فإن طريقة المماس تعطى النتيجة الآتية

$$\frac{1}{4} \text{ ح س } (1 + 4 \text{ ع } - \text{ف})$$

وهى أضبط بأربعة أمثال مما اذا قيس الاحداثى الواقع فى الوسط على المنحنى فقط والخطأ فى طريقة المماس فى هذه الحالة يساوى ١ من ٨٠ والخطأ فى الحالة الأخرى يساوى ١ من ٢٠

وأحسن طريقة لمعرفة مزية هذا التعديل هى أن نحسب مساحة القطعة ح ب ع فى الشكل السابق فبطريقة المماس كما سبق تطبيقه تكون مساحة القطعة فى الواقع  $= \frac{1}{4} \text{ ح س } (1 + 4 \text{ ع } - \text{ف})$

والآن اذا طبقنا قاعدة سمسون على هذه القطعة نفسها فالتا بالطبيعة نقيس القطاع الواقع فى الوسط من ح فى اتجاه العمود على ب ح وفى هذه الحالة تعطينا القاعدة ما يأتى

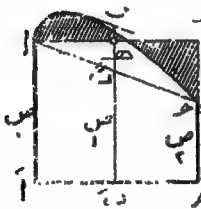
$$\text{مساحة القطعة} = \frac{1}{4} \text{ ارتفاع القطعة} \times \text{ب ح}$$

ومن السهل أن نرى أن هذين المقدارين للمساحة متساويان فى القيمة وهذا لا يكون لو أخذنا ع ح بدلا من ع ح فى القانون الأول من القانونين

السابقين فطريقة المماس لها فائدة أنها تعطى مقدارا للمساحة لا يتغير مهما كان اتجاه قياس الاحداثى الرأسى الواقع فى الوسط وهذه النتيجة مهمة جدا

واذن ففى جميع المنحنيات البيانية يلزم أن يقاس الرأسى الواقع فى الوسط الى المماس المرسوم موازيا لوتر القوس ولا يستثنى من هذه القاعدة الا الحالة التى يكون فيها المنحنى ذا جزأين مختلفى جهة الانحناء كما فى الشكل الأول من بند ٤٤ ففى مثل هذه الحالة اذا قدرت المساحة بواسطة رأسى واحد واقع فى الوسط فان طريقة المماس تكون أقل ضبطا من طريقة سمبسون نفسها وفى الواقع فانه فى الشكل المشار اليه لا يمكن تطبيق قاعدة المماس فى هذا التقدير لان هناك مماسين كل منهما مواز الى ١ ب فأضبط طريقة حيثنذ هى أن تقسم المساحة الى جزأين (كما عملنا فى ذلك البند) ثم تطبيق طريقة المماس على كل قسم

#### ٤١ - طريقة الثلاثين - ارتفاع المستطيل المكافئ



فى قياس جزء من منحن بياضى بتطبيق واحد لطريقة المماس ليس من الضرورى قياس الارتفاع فى الوسط وفى الطرفين بل يكفى قياس واحد كما سنورى ذلك الآن

فليكن عندنا شكل محصور بين الرأسين ص٦ ص٣ ولنفرض أن طول الرأسى الواقع فى الوسط ب ب (لحد المماس) يساوى ص٣

ولیکن ص٦ هو الارتفاع المتوسط للشكل فيكون

$$\frac{\text{ص}٦ + \text{ص}٤ + \text{ص}١}{٣} = \text{ص}$$

والارتفاع  $\overline{b} = \frac{1}{4} (\overline{c} + \overline{c}_1)$  فإذا رمزنا لهذا الطول بالرمز  $\overline{c}$  فإنه يكون

$$\begin{aligned} \overline{c} &= \frac{1}{4} (\overline{c}_1 + \overline{c}_2) \\ \overline{c} &= \frac{1}{4} (\overline{c}_1 - \overline{c}_2) + \overline{c} \\ \overline{c} &= \overline{b} + \overline{b} \end{aligned}$$

وحيث إذا أخذنا النقطة  $h$  على  $\overline{b}$  بحيث يكون  $\overline{b} = \frac{1}{4} \overline{b}$  فإن  $\overline{b}$   $h$  يكون هو الارتفاع  $\overline{c}$  المطلوب والخط المار بنقطة  $h$  موازيا إلى  $\overline{a}$  يحل المستطيل الذي مساحته تساوى مساحة الشكل المعلوم وهذه القاعدة التي بها يمين ارتفاع المستطيل المكافئ يطلق عليها غالباً اسم قاعدة الثلثين

وينبى أن يلاحظ أن أى خط مار من نقطة  $h$  إلى المحيط يحل شبه المنحرف المكافئ في المساحة

وينبى أن يلاحظ أيضاً أن المساح المحصورة بين هذا الخط والمنحنى (أى الأجزاء المظلة في الشكل) تتعادل مع بعضها أى أن المساحة المظلة فوق الخط تساوى المساحة المظلة تحته وفى كثير من الأحيان يكفى مجرد النظر في معرفة الوضع الموافق للخط إذا لم يقصد سوى الحصول على تقدير تقريبي للمساحة

وإذا كان كل من الحدين المقطوعين بالرأسى الواقع في الوسط منحنين فإن قاعدة الثلثين يلزم أن تطبق على كل من نهايتى الخط ويكون الارتفاع المتوسط هو البعد بين التقطعتين المعيتين بهذه الطريقة (أنظر شكل نصف الدائرة في بند ٤ الذى فيه الارتفاع المتوسط يساوى المسافة بين التقطعتين المرقوم عليهما  $\frac{1}{3}$ )

٤٢ - وإذا قسم الشكل الى قسمين فالرأسيات المتوسطة  
 $\text{ص} \text{ ص} \text{ ص}$  للقسمين يمكن تعيينها بالكيفية نفسها وإذا كان  $\text{ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل}$  هما  
 عرضا القسمين العموديان على  $\text{ص} \text{ ص} \text{ ص}$  فان المساحة تكون  
 $\text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل}$

وإذا كان مقدارا  $\text{ل} \text{ ل} \text{ ل}$  متساويين وهى اداة التى يكون فيها كل منهما  
 مساويا الى  $\frac{1}{2}$  ل فان مقدار المساحة يؤول الى

$$\frac{1}{2} (\text{ص} + \text{ص}) \text{ ل}$$

واذن فى هذه الحالة يكون الارتفاع المتوسط  $= \frac{1}{2} (\text{ص} + \text{ص})$

٤٣ - وبنفس الطريقة يقسم الشكل الى أى عدد من الأشرطة  
 بخطوط متوازية أمسدها عن بعضها على التناظر  $\text{ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل}$   
 فاذا كانت الارتفاعات  $\text{ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص}$  للمستطيلات المكافئة معلومة  
 فالمساحة

$$= \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل} + \text{ص} \text{ ل}$$

وإذا كان  $\text{ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل} \text{ ل}$  الخ  $= \frac{1}{2} \text{ ل}$  فمقدار المساحة يؤول الى

$$\text{المساحة} = \frac{1}{2} (\text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص} + \text{ص}) \text{ ل}$$

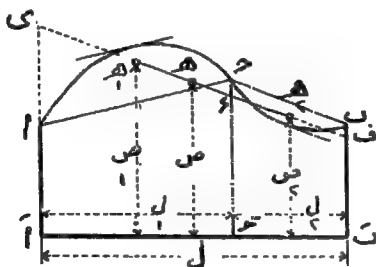
٤٤ - الرسم البياني المشتمل على  $\text{ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص} \text{ ص}$  الخ

لنفرض أن المساحة المحصورة بين الخط المنحني  $\text{أ ح ب}$  والخطوط الثلاثة  
 $\text{أ أ} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب}$  التى منها الخطان  $\text{أ أ} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب}$  متوازيان وانها  
 مقسومة الى جزأين بخط  $\text{ح ح}$  مرسوم بالتوازي الى الطرفين  $\text{أ أ} \text{ ب} \text{ ب}$   
 ولناخذ نقطة  $\text{ه}$  على الرأسى المنصف للخط  $\text{أ ح}$  بحيث يكون بعدها  
 عن  $\text{أ ح}$  مساويا الى  $\frac{1}{2}$  البعدين  $\text{أ ح}$  وبين المماس الموازى الى  $\text{أ ح}$

فتكون نقطة ه هي النهاية العليا للرأسي المتوسط أو الارتفاع صم للجزء الأيسر من المساحة

وبمثل ذلك لنفرض أن ه هي النهاية العليا للرأسي المتوسط للقسم الأيمن فإذا وصلنا ه ه بحيث يقطع ح ح في س وأخذنا على ه ه نقطة مثل ه ه بحيث يكون ه ه = س ه ه فنقطة ه تكون هي النهاية العليا للرأسي المتوسط لجميع المساحة .

وذلك لأنه إذا رسم ه ه بحيث يقابل الخطين الجانبين في ع ف فإن مساحة شبه المنحرف ع آ ب ف تساوى مساحة الشكل المعلوم وعليه يكون الرأسي المتوسط لشبه المنحرف هو الارتفاع المتوسط للشكل وعلينا الآن أن نين أن نقطة ه هي وسط الخط ع ف



$$\text{وبما أن ه ه} = \text{س ه ه} = \frac{1}{4} \text{ ع ف}$$

$$\text{فيكون ع ه} = \text{س ه ه} + \text{ه ه} = \frac{1}{4} \text{ ع ف} + \text{س ه ه} = \frac{1}{4} \text{ ع ف} + \frac{1}{4} \text{ ع ف} = \frac{1}{2} \text{ ع ف}$$

أي أن ه هي النقطة المتوسطة لخط ع ف

واذن تكون نقطة ه هي النقطة المطلوبة والرأسي المار بنقطة ه هو ارتفاع المستطيل المساوي في القاعدة والمساحة للشكل المفروض وينبني أن يلاحظ أنه اذا كان جزأ الشكل متساويين في العرض فنقطة ه هي نقطة تقاطع ه ه ه بانخط ح ح

ومن الواضح أنه يمكن التوسع في هذا الرسم لايجاد الارتفاع المتوسط حينما تكون المساحة المعلومة مقسومة الى أكثر من قسمين فيوجد أولا الارتفاع المتوسط لكل قسم ثم الارتفاع المتوسط لكل قسمين ثم لثلاثة وهكذا وتوضيح ذلك مبين فيما يأتي

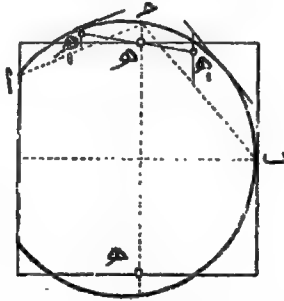
وينبني أن يلاحظ أن في هذه الطريقة البيانية ليس من الضروري أن نرسم الرأسيات المتوسطة المختلفة ص ٦ ص ٦ ص ٦ . . . وانما الضروري تعيين النهايات العليا لها ه ه ه الخ ومن الموافق أن يكون لهذه النقط أسماء خاصة بها والأحسن أن تسمى نقط الارتفاع أو مراكر الارتفاع للاجزاء المختلفة والشكل الآتي يوضح طرق ايجاد مستطيلات مكافئة في أحوال قطعة



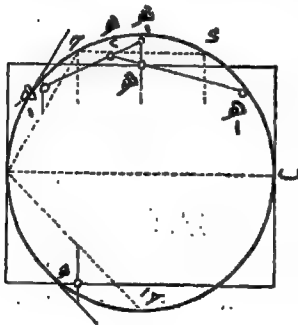
دائرية صغيرة أو قطعة دائرية كبيرة ودائرة تامة وعلى الطالب أن يتم العملية بنفسه على رسم أكبر كثيرا

ففي حالة ما تكون القطعة صغيرة يكون من الضروري فقط ايجاد نقطة ارتفاع واحدة بأخذ نقطة الارتفاع لنصف القطعة التي قوسها هو أ ح كما أن نقطة الارتفاع للنصف الثاني تكون على الارتفاع المذكور بعينه من القاعدة وقد ظللنا هذا الشكل لأجل أن نبين التوازن في زيادة مساح القطعة والمستطيل وهناك طريقة أحسن لأجل هذا البيان وهي تلوين المساحتين الزائدتين بين مختلفين

والقطعة الكبرى تقسم الى جزأين متساويين في العرض بنخط رأسي ماز  
بنقطة ح وقد بينت نقطتا الارتفاع العليا من هذين الجزأين بحرفي هـ ٦ هـ  
ونقطة الارتفاع النهائي هـ تتحصل بتكوينهما معا ونقطة الارتفاع السفلي  
(المسماة هـ أيضا) موضوعة في الأسفل بمثل ذلك والارتفاع المتوسط هو  
البعد بينهما



وفي الدائرة قد وجدت نقطة الارتفاع العليا بقسمة نصف الدائرة الأعلى  
الى ثلاثة أجزاء ثم وجدت نقط الارتفاع هـ ٦ هـ ٦ هـ لهذه الأجزاء المختلفة



مع تجميع هذه النقط بالكيفية  
الموضحة أعلاه أما النقطة السفلى  
فانها قد وجدت بعملية واحدة  
وينبغي للطالب أن يكررها  
على رسم مقياسه كبير وأن يقارن  
الضبط الذي في الطريقتين  
والفرق طفيف جدا

٤٥ - والقاعدة أنه اذا أريد الحصول على دقة عظيمة فالأحسن أن لا يبحث عن الارتفاع المتوسط بهذا الطريق البياني بل تقسم المساحة الى عدد كاف من الأشكال المتساوية العرض وأن يبحث عن الارتفاعات المتوسطة لها ص ٦ ص ٦ . . . وتقاس بالدقة ثم يحسب الارتفاع المتوسط ص للشكل كله من القانون

$$ص = \frac{1}{3} (ص + ص + ٠.٠٠٠)$$

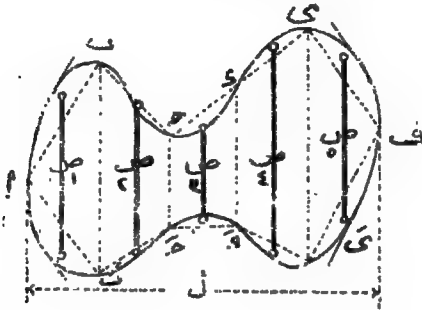
وفي هذا القانون د هو عدد الأشكال

والسبب في أن هذه الطريقة أدق هو أنه مع أن كل ارتفاع متوسط ص ٦ ص ٦ . . . تتعلق دقته بمهارة الرسام فان الخطات تتعادل كثيرا أو قليلا بحيث يكون المتوسط المحسوب أدق من الناتج من المقاسات منفردة ولكن في الطريقة البيانية التي فيها تجمع المتوسطات الجزئية المنفصلة لايجاد ص فانه لا يمكن تحقيق مقدارها الا بقياس ص نفسها والأضبط أن يحسب ص باعتباره متوسط جملة كميات مقيسة ولا يقاس مباشرة من الشكل

والشكل التالي يرى طريقة حساب شكل غير متظم بواسطة متوسط الارتفاعات المتوسطة (ص الى ص) لخمس أجزاء متساوية العرض ويجب أن تقاس هذه الارتفاعات المتوسطة باعتناء وأن يقاس الطول ل أيضا من الشكل في اتجاه عمودى عليها فيكون مقدار المساحة هو  $\frac{1}{3} ل$  (ص + ص + ص + ص + ص) وفي تعيين نهايات الخطوط ص الخ ينبغي أن يلاحظ أن الواقع في هذا الشكل أن طريقة المقاسات انما تكون مهمة في ص ٦ ص ٦ وأن هناك حالة لا يمكن تطبيقها فيها أى في حالة تعيين نهاية ص وذلك لأن المنحنى من نقطة ب الى نقطة ح يتركب



من جزأين متضادى اتجاه الانحناء بحيث يوجد تماسان في هذا الجزء موازيان للوتر ب ح ففى مثل هذه الأحوال يجب استعمال طريقة سمبسون

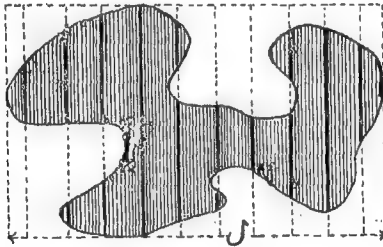


البسيطة وحدها أى من النقطة العليا تؤخذ على ثلثى الارتفاع بين الوتر والمنحنى وفى الواقع متى وجد أى أثر لاقلاب الانحناء يكون الأحسن ترك طريقة التماسات ومثل هذه الحالة تحصل فى الجزء بين ٦ و ٧ وفيها يجب استعمال طريقة سمبسون نفسها

٤٦ — تعيين المسامخ غير المنتظمة بطريقة الرأسيات الواقعة فى الوسط

فى حالة ما تكون الأشكال غير منتظمة بالمرة فالغالب أن يكون الأحسن أن تقسمها الى أقسام كثيرة ويبحث عن القطاع الذى فى وسط كل واحد منها ويعتبر أنه القطاع المتوسط فالخطات التى تدخل تمامي كثيرا أو قليلا وفضلا عن ذلك فإنها تصير صغيرة إذا كانت الأقسام ضيقة العرض ضيقا كافيا وينبغى أن يلاحظ فى الشكل الأخير أن الخطات الناشئة عن قياس

الرؤاسيات ص ٦ ص ٦ . . . . الى المنحنى بدلا من قياسها الى نقط الارتفاع الحقيقي ليست خطوات مهمة الا في الطرفين وانا لو أخذنا عشرة رؤاسيات من هذا القبيل بدلا من خمسة فان الخطات النسبية تكون أقل بكثير ثم ان أعظم خطأ يحصل هو في الطرفين وربما كان من المفيد أخذ المتوسط الحقيقي للرؤاسيات في هاتين الحالتين والعادة أن تؤخذ عشرة رؤاسيات وذلك أولا بسبب أخذ هذا العدد العظيم يتأكد من الدقة وأيضا لأن القسمة على ١٠ لايجاد المتوسط لا تحتاج الى أكثر من نقل العلامة الاعشارية وقد بينا هنا شكلا فيه الرؤاسيات الواقعة في الوسط هي المقصود استعمالها وقد أخذت قريبة من بعضها جدًا فالرؤاسيات الواقعة في وسط الأقسام مبينة في الرسم ولم نبين حدود الأقسام نفسها واذا قطع رأسى واحد المساحة أكثر من مرة



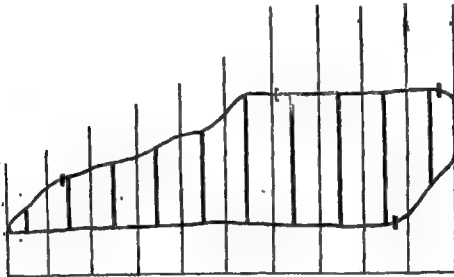
فالأجزاء المختلفة منه تضم الى بعضها وقد رسمنا عشرة رؤاسيات حتى يقسم مجموعها على ١٠ للحصول على المتوسط وهذا المتوسط يضرب في الطول لـ لأجل إيجاد المساحة

ويمكن امتحان النتيجة بتقسيم الشكل الى عشرة أقسام موازية الى لـ ورسم أجزاء الخطوط الواقعة في وسط تلك الأقسام والتي يشتمل عليها الشكل

وقياسها فعشر هذا المجموع يكون هو الطول المتوسط الذى يلزم ضربه فى الارتفاع الأكبر للشكل لأجل الحصول على المساحة ومن الواضح أنه يمكن الحصول على دقة أعظم بتقسيم الشكل الى أكثر من عشرة أجزاء

وأسهل طريقة هى أن تقاس الأطوال على حرف شريط طويل من الورق وذلك ليكون مجموع الرأسيات العشرة الواقعة فى الوسط خطا واحدا فعشر هذا الطول الكلى هو المتوسط المطلوب

وهذه الطريقة وهى أخذ القطاعات الواقعة فى وسط عشرة أقسام جزئية تستعمل كثيرا فى حساب الارتفاع المتوسط للمنحنى البياني لآلة بخارية وهاك مثالا لذلك



#### ٤٧ - البلانيمتر

وفى العمل حينما تكرر الحاجة لمعرفة المساح لا تحسب أبدا بل يتحصل عليها باستعمال البلانيمتر أو آلة قياس المسطحات فالآلة الأولى اخترعها مهندس باقارى فى سنة ١٨١٤ ومنها الآن جملة أنواع مستعملة وفى كلها تتبع الطريقة الآتية وهى أنه بعد تجهيز الجهاز كله تدار الآلة حول المنحنى المطلوب تعيين

مساحته ثم تقرأ المساحة على الجزء الخاص بالقراءة من الجهاز وفائدة هذه الآلة في نظر الطالب لعلم تقدير السطوح والأجسام اذا وجدت لديه أن يحقق بها ضبط النتائج التي يحصل عليها باحدى الطرق المشروحة في هذا الفصل وهي في هذا الغرض مفيدة جدا

وعلى أى حال يستحسن أن الطالب يرسم جملة منحنيات بيانية ويحسب مساحتها بجملة من الطرق المتقدمة باستعمال طريقة لتحقيق نتائج الطريقة الأخرى وهالك بعض أمثلة

### تمارين (٦)

المطلوب رسم القطع الدائرية الآتية بمقياس رسم مناسب مع إيجاد مساحتها  
(١) برسم منحن مؤسس على طريقة المماس (٢) بواسطة الرأسيات العشرة الواقعة في الوسط

(١) وتر القطعة ٤٠ مترا وسهمها ٨ أمتار

(٢) وتر القطعة ١٠ سنتيمترات وسهمها ١٢ سنتيمترا

(٣) ح = ٢٠ سنتيمترا ٦ ح = ١٢ »

(٤) ح = ١٢ » ٦ ح = ٢٠ »

(٥) نصف قطر الدائرة يساوى ١٢ سنتيمترا وتر القطعة ١٤ سنتيمترا

(المطلوب إيجاد مساحة كل قطعة في هذه الحالة وتحقيق ذلك بمقارنة المجموع بالمساحة المحسوبة للدائرة جميعها)

(٦) المطلوب رسم محيط مديرية على ورق شفاف نقلا عن خريطة ثم إيجاد مساحتها بطريقة الرأسيات الواقعة في الوسط مع استعمال مقياس الرسم المبين بأحد جوانب الخريطة

## الفصل الثانى

### سطوح الأجسام

٤٨ — ليس هناك طريقة عامة بها يمكن إيجاد مساحة السطح المنحنى لجسم مشابهة للقانون المنشورى الذى تعين بواسطته الأحجام الا أنه فى بعض الأحوال يمكن تعين السطح بقسمته الى أجزاء مستوية بالضبط أو بالتقريب وفى الأحوال الأخرى يمكن تعيينه بواسطة معلومية الحجم

### ٤٩ — السطح المنحنى للأسطوانة

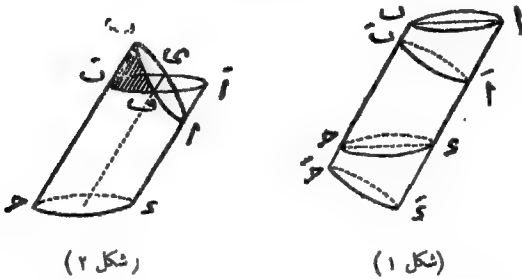
(١) اذا كان السطح محدودا بمستويين عموديين على المحور فيمكن أن يقسم السطح فى هذه الحالة الى مستطيلات ضيقة بخطوط موازية للمحور بحيث تكون مجموع قواعد المستطيلات مكثونا لمحيط احدى قاعدتى الاسطوانة وارتفاع تلك المستطيلات يكون هو البعد بين القواعد أى طول المحور وحينئذ يكون السطح مساويا الى طول المحور فى محيط احدى القاعدتين

(٢) اذا كان السطح محدودا بمستويين متوازيين ليسا عموديين على المحور فاذا فرضنا أن جزءا قد قطع من احدى النهايتين بمستوى عمودى على المحور ووضع فى النهاية الأخرى كما فى شكل (١) فاننا نرى أن السطح المنحنى يساوى طول المحور  $\times$  محيط القطاع العمودى على المحور

(٣) واذا كان السطح محدودا بمستويين أيا كانا

فنرم مستوىا مارا بنقطة تقابل المحور باحدى القاعدتين وموازيا للقاعدة الأخرى ونفرض أن السطح الاسطوانى كل حتى يقابل هذا المستوى الجديد بحيث يكون ١ ب ٦ ح ٥ هما قاعدتا الاسطوانة (شكل ٢) ٦ ٦ ب

هو المستوى المرسوم بالتوازي الى  $ح د$  ومارب نقطة تقابل المستوى  $ا ب$  بالمحور فن الواضح حينئذ أن القطعتين المحصورتين بين المستويين  $ا ب$  و  $ا ب$  متساويتان بسبب تماثلهما وأن السطح (والجسم أيضا) لا يتغيران اذا أديرنا القطعة  $ب ب$  الى الوضع  $ا ا$  بحيث تكون



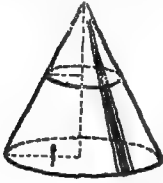
الاسطوانة المعلومة  $ا ب ح د$  مساوية في السطح للاسطوانة  $ا ب ح د$  التي هي الاسطوانة المذكورة في الفقرة (٢) المتقدمة  
واذن ففي كل حال يكون —

سطح أى اسطوانة يساوى طول محورها مضروبا في محيط القطاع العمودى على هذا المحور

٥٠ — السطح المنحنى لمخروط دائرى قائم

طول راسم أى مخروط يساوى  $ا ب + ح د$  وفي هذا القانون  $ح د$  هو ارتفاع المخروط و  $ا ب$  نصف قطر قاعدته فلنرمز لطول هذا الراسم بالحرف  $ل$

فالسطح المنحني يمكن أن يقسم الى عدد من المثلثات المتساوية الساقين الضيقة التي يكون مجموع قواعدها يحيط القاعدة ورؤوسها جميعها متحدة مع رأس المخروط



فمساحة كل مثلث من هذه المثلثات هي حاصل ضرب نصف قاعدته في ارتفاعه واذن يكون مساحة السطح المنحني مساوية لنصف مجموع القواعد مضروبا في الارتفاع ل

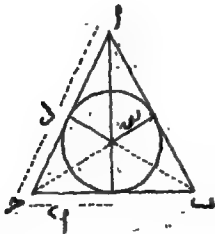
$$\text{أي أن السطح المنحني} = \frac{1}{2} (2 \text{ ط } 1) \text{ ل} = \text{ط } 1 \text{ ل}$$

ومحيط القطاع الذي في نصف الارتفاع بين قاعدة المخروط ورأسه يساوي ط 1 لأن نصف قطره =  $\frac{1}{2}$

واذن فالسطح المنحني لمخروط يساوي طول الراس مضروبا في محيط

القطاع المأخوذ في وسط ارتفاعه

٥١ - ويمكن إيجاد السطح المنحني لمخروط بعد معرفة حجمه بالطريقة الآتية



لنأخذ قطاعا مارا بمحور المخروط ١ و  
فهذا القطاع يكون مثلثا متساوي الساقين  
قاعدته ١ ط ٢ وارتفاعه هـ

وليكن ب نصف قطر الدائرة المرشومة  
داخل هذا المثلث نأذا أدير الشكل كله  
حول ١ فانه يتكون مخروط داخله كرة  
نصف قطرها ب

ثم ان المخروط يمكن قسمته الى عدد من الأهرام الضيقة رؤوسها كلها في مركز الكرة التي رسمت داخلا وقواعدها على السطح المنحني للمخروط أو على قاعدته المستوية

والارتفاع المشترك لجميع هذه الأهرام هو  $h$  وقواعدها مجتمعة تكون السطح المنحني للمخروط المعلوم بما فيها سطح القاعدة المستوية ط  $^1$

واذن حجم المخروط =  $\frac{1}{3} h$  (السطح المنحني + ط  $^1$ )

وحينئذ اذا أمكن أن نعین نصف القطر  $r$  بدلالة الذكيات  $16^\circ 6'$  لانه يمكن أن نعین السطح المنحني

وبما أن المثلثات الثلاثة وب  $h$  و  $16^\circ 6'$  و  $16^\circ 6'$  تكون باجتماعهما المثلث  $16^\circ 6'$

فيكون  $h = (1 + \frac{1}{4} l + \frac{1}{4} l) = 1.5$

ومنه يكون  $\frac{1}{4} l = \frac{1}{4} h$

وحجم المخروط كله =  $\frac{1}{3} h$  ط  $^1$

واذن يكون  $\frac{1}{4} h$  ط  $^1 = \frac{1}{4} h \cdot \frac{1}{4} l = \frac{1}{4} h$  (السطح المنحني + ط  $^1$ )

ويكون ط  $^1 = (1 + l) =$  السطح المنحني + ط  $^1$

ومنه السطح المنحني = ط  $^1 l$  كما تقدم

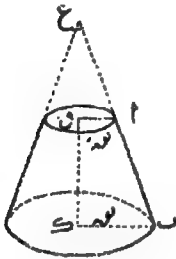
## ٥٢ - السطح المنحني لمخروط ناقص

ان السطح المنحني للمخروط كله = ط  $^1 \times ب ع$

والسطح المنحني للمخروط الصغير = ط  $^1 \times ب ع$

فانما كان  $16^\circ 6' = l =$  راسم المخروط اناقص فن تشابه المثلثات





$$\frac{ب}{ع} = \frac{ب}{ل+ع} \quad \text{يكون}$$

$$\frac{ب}{ع} = \frac{ل+ب}{ل+ع} \quad \therefore$$

$$\frac{ب}{ع} - \frac{ب}{ل+ع} = \frac{ل}{ل+ع} \quad \therefore$$

ومن هنا يكون

$$\frac{ل}{ل+ع} = \frac{ب}{ل+ع}$$

$$\frac{ل}{ل+ع} = \frac{ب}{ل+ع} \quad \text{ف } ع = ب = ل + ب$$

$$\frac{ط ب ل}{ب - ب} = \text{ويكون السطح المنحني للمخروط كله}$$

$$\frac{ط ب ل}{ب - ب} = \text{السطح المنحني للمخروط الصغير}$$

$$\frac{ط ب ل}{ب - ب} \cdot ط ل = \text{ومن ذلك يكون سطح المخروط الناقص}$$

$$= ط ل (ب + ب)$$

ومحيط القواعد الذي في وسط ارتفاع المخروط الناقص أى في وسط المسافة بين القاعدتين الدائريتين يساوى ط (ب + ب) لأن نصف قطره يساوى  $\frac{1}{2} (ب + ب)$

وطيه السطح المنحني لمخروط ناقص يساوى ط ب ل راسم المخروط الناقص

مضروباً في محيط القطاع الذي في وسط ارتفاعه

٥.٣ - السطح المنحني للكرة

يمكن أن تحصل على السطح المنحني للكرة من حجمها مباشرة بملاحظة

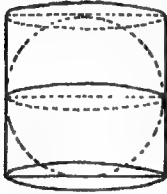
أن الحجم يمكن تكوينه من أهرامات ضيقة رؤوسها في مركز الكرة وقواعدها معا تتكون السطح المنحني للكرة

وإذا يكون  $\frac{1}{3} \pi r^2$  (السطح المنحني) =  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ط  $\pi r^2$

ويكون السطح المنحني للكرة =  $4 \pi r^2$  ط  $\pi r^2$

= مساحة أربع دوائر عظيمة من الكرة

وينبغي أن يلاحظ أن هذه المساحة تساوى مساحة السطح المنحني للأسطوانة مرسومة على الكرة



وهذا يوافق ما هو معلوم من أن حجم الاسطوانة يزيد عن حجم الكرة بقدر نصفه (أنظر مسألة ٧ من تمارينات ١٦)

وذلك لأن الاسطوانة يمكن أن تتكون من أهرام ضيقة رؤوسها في مركز الكرة ومجموع قواعدها

تتكون السطح الكلي للأسطوانة والارتفاع المشترك لجميع تلك الأهرام يساوى  $\pi r^2$  وأذن يكون الحجم مساوياً إلى  $\frac{1}{3} \pi r^2 \times$  السطح الكلي

وأذن يكون  $\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{السطح الكلي للأسطوانة}} = \frac{\text{حجم الكرة}}{\text{حجم الاسطوانة}} = \frac{2}{3}$

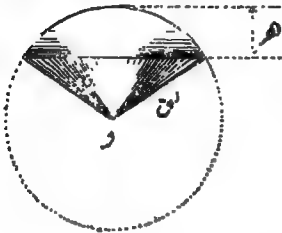
لكن السطح الكلي للأسطوانة =  $4 \pi r^2$  ط  $\pi r^2$  +  $2 \pi r^2$  ط  $\pi r^2$  =  $6 \pi r^2$  ط  $\pi r^2$

وأذن يكون سطح الكرة =  $\frac{2}{3} (6 \pi r^2) = 4 \pi r^2$  ط  $\pi r^2$

#### ٥٤ - سطح القطعة الكروية

قد أثبتنا في الفصل السابق أن حجم أى قطاع كروي قاعدته قطعة كروية ارتفاعها  $\frac{2}{3} \pi r^2$  ط  $\pi r^2$  هـ بفرض أن  $\pi r^2$  هو نصف قطر الكرة

ثم ان هذا القطار يمكن أن يعتبر مكونا من عدد عظيم من الأهرام الضيقة التي قواعدها على السطح المنحني للقطعة وجميع رؤوسها في مركز الكرة



فارتفاع كل من هذه الأهرام الصغيرة يساوى ن ومجموع قواعدها يكون السطح المنحني للقطعة واذن يكون مجموع الأجام مساويا الى  $\frac{1}{3} ن \times$  السطح المنحني للقطعة

$$\text{ومنه } \frac{1}{3} ن \times \text{السطح المنحني للقطعة} = \frac{2}{3} ط ن ه$$

$$\text{فيكون السطح المنحني للقطعة} = 2 ط ن ه$$

أى ان السطح المنحني للقطعة الكروية يساوى محيط دائرة عظيمة من الكرة مضروبا في ارتفاع القطعة أو يساوى السطح المنحني للاسطوانة التي ارتفاعها نفس ارتفاع القطعة ونصف قطر قاعدتها يساوى نصف قطر الكرة

$$\begin{aligned} ٥٥ - \text{وبما أن } ١ + ه^2 &= ٢ ن ه \text{ ٦ ه هو نصف قطر قاعدة} \\ \text{القطعة الكروية فسطح القطعة يمكن أن يبين بدلالة } ١ \text{ ٦ ه بالمقدار الآتى} \\ \text{سطح القطعة} &= ط (١ + ه^2) \end{aligned}$$

ويمكن التحقق من صحة هذه النتيجة بملاحظة (١) أنه في حالة الكرة التامة يكون  $١ = ٠$  ٦ ه  $= ٢ ن$  (٢) وفي حالة نصف كرة يكون  $١ = ه$   $= ن$  وينبى أن يلاحظ أيضا أنه اذا كان  $ه = ٠$  وكان  $١$  مخالفا للصفر وهو الأمر الذى لا يحصل الا اذا كان  $ن = \infty$  أى حينما يؤول سطح الكرة

الى مستو فال مقدار الذى يحدد سطح القطعة الكروية يؤول الى سطح دائرة نصف قطرها ١

### ٥٦ - سطح القطعة الكروية الناقصة

حيث ان القطعة الكروية الناقصة هى الفرق بين قطعتين كرويتين فسطحها يساوى محيط دائرة عظيمة من الكرة مضروباً فى الفرق بين ارتفاعى القطعتين أى مضروباً فى ارتفاع القطعة الكروية الناقصة

فاذا كان ه هو ارتفاع القطعة الكروية الناقصة فيكون سطحها المنحنى  $= ٢ ط ب ه$

أى أن السطح المنحنى لقطعة كروية ناقصة يساوى محيط دائرة عظيمة من الكرة مضروباً فى ارتفاع القطعة الناقصة أو يساوى السطح المنحنى لأسطوانة متحدة معها فى الارتفاع ونصف قطر قاعدتها يساوى نصف قطر الكرة

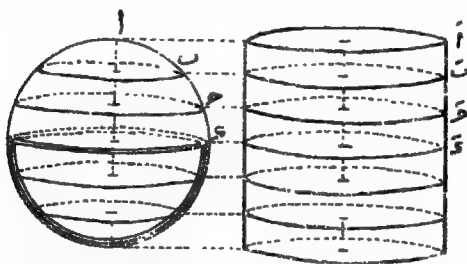
واذا وضعنا ه = ٢ ب فانه يحصل على السطح الكلى للكرة = ٤ ط ب

٥٧ - وبما أن سطح قطعة كروية ناقصة يساوى سطح أسطوانة متحدة معها فى الارتفاع وقطرها مساو لقطر الكرة فينتج من ذلك أنه اذا قطعت الكرة بعدد من القطاعات المتساوية التباعد بحيث تقسم الكرة الى جملة قطع ناقصة متساوية الارتفاع فان أسطح هذه القطع الناقصة تكون متساوية ومساوية لاسطح قطع من الاسطوانة المذكورة اذا رسمت محيطة بالكرة وكانت القطاعات عمودية على محور الاسطوانة وقد بينا فى الرسم الاسطوانة مجاورة للكرة

واذا أشكل فهم تساوى تلك السطوح فيجب أن نلاحظ أن المناطق ذات القواعد الصغيرة سطوحها مائلة ميلا عظيما وأن هذه الزيادة فى العرض

للمناطق الصغيرة تعوض نقص محيطها فمثلا ا ب أكبر من ج د هـ  
أكبر من د هـ

وينبغي أن يقرأ ما يأتي في بند ١١٧ حيث يتبين أنه إذا كانت الكرة مجوفة وكان التجويف عبارة عن كرة متحدة مع الكرة الأولى في المركز فإن القطع الكروية الناقصة الناشئة عن مستويات متوازية وعلى أبعاد متساوية وقاطعة لكل من الكرة والتجويف تكون متساوية في الحجم ويمكن استنباط



تساوى السطوح من هذا لأن تلك القطع المجوفة جميعها متساوية في السمك المقاس في اتجاه عمودى على الأسطح واذن اذا اعتبرنا أنها ضيقة جدًا بحيث يكون السطح الداخلى مساويا تقريبا للسطح الخارج فسطح تلك القطع يلزم أن يكون واحدا وذلك لأن حجم كل منها يساوى السطح مضروبا في السمك

٥٨ - ومقدار السطح المنحني بدلالة  $h$   $616$  ب لقطعة كروية ناقصة ارتفاعها  $h$  ونصف قطر قاعدتيها الدائريتين هما  $61$  ب يمكن استخراجها من المقدار  $2$  ط ب  $h$

لأن  $4 \times 3 = 12$  و  $2 \times 2 = 4$  و  $2 \times 1 = 2$  و  $1 \times 1 = 1$  و  $1 \times 2 = 2$  و  $1 \times 3 = 3$  و  $1 \times 4 = 4$  و  $1 \times 5 = 5$  و  $1 \times 6 = 6$  و  $1 \times 7 = 7$  و  $1 \times 8 = 8$  و  $1 \times 9 = 9$  و  $1 \times 10 = 10$  و  $1 \times 11 = 11$  و  $1 \times 12 = 12$  و  $1 \times 13 = 13$  و  $1 \times 14 = 14$  و  $1 \times 15 = 15$  و  $1 \times 16 = 16$  و  $1 \times 17 = 17$  و  $1 \times 18 = 18$  و  $1 \times 19 = 19$  و  $1 \times 20 = 20$  و  $1 \times 21 = 21$  و  $1 \times 22 = 22$  و  $1 \times 23 = 23$  و  $1 \times 24 = 24$  و  $1 \times 25 = 25$  و  $1 \times 26 = 26$  و  $1 \times 27 = 27$  و  $1 \times 28 = 28$  و  $1 \times 29 = 29$  و  $1 \times 30 = 30$  و  $1 \times 31 = 31$  و  $1 \times 32 = 32$  و  $1 \times 33 = 33$  و  $1 \times 34 = 34$  و  $1 \times 35 = 35$  و  $1 \times 36 = 36$  و  $1 \times 37 = 37$  و  $1 \times 38 = 38$  و  $1 \times 39 = 39$  و  $1 \times 40 = 40$  و  $1 \times 41 = 41$  و  $1 \times 42 = 42$  و  $1 \times 43 = 43$  و  $1 \times 44 = 44$  و  $1 \times 45 = 45$  و  $1 \times 46 = 46$  و  $1 \times 47 = 47$  و  $1 \times 48 = 48$  و  $1 \times 49 = 49$  و  $1 \times 50 = 50$  و  $1 \times 51 = 51$  و  $1 \times 52 = 52$  و  $1 \times 53 = 53$  و  $1 \times 54 = 54$  و  $1 \times 55 = 55$  و  $1 \times 56 = 56$  و  $1 \times 57 = 57$  و  $1 \times 58 = 58$  و  $1 \times 59 = 59$  و  $1 \times 60 = 60$  و  $1 \times 61 = 61$  و  $1 \times 62 = 62$  و  $1 \times 63 = 63$  و  $1 \times 64 = 64$  و  $1 \times 65 = 65$  و  $1 \times 66 = 66$  و  $1 \times 67 = 67$  و  $1 \times 68 = 68$  و  $1 \times 69 = 69$  و  $1 \times 70 = 70$  و  $1 \times 71 = 71$  و  $1 \times 72 = 72$  و  $1 \times 73 = 73$  و  $1 \times 74 = 74$  و  $1 \times 75 = 75$  و  $1 \times 76 = 76$  و  $1 \times 77 = 77$  و  $1 \times 78 = 78$  و  $1 \times 79 = 79$  و  $1 \times 80 = 80$  و  $1 \times 81 = 81$  و  $1 \times 82 = 82$  و  $1 \times 83 = 83$  و  $1 \times 84 = 84$  و  $1 \times 85 = 85$  و  $1 \times 86 = 86$  و  $1 \times 87 = 87$  و  $1 \times 88 = 88$  و  $1 \times 89 = 89$  و  $1 \times 90 = 90$  و  $1 \times 91 = 91$  و  $1 \times 92 = 92$  و  $1 \times 93 = 93$  و  $1 \times 94 = 94$  و  $1 \times 95 = 95$  و  $1 \times 96 = 96$  و  $1 \times 97 = 97$  و  $1 \times 98 = 98$  و  $1 \times 99 = 99$  و  $1 \times 100 = 100$  و  $1 \times 101 = 101$  و  $1 \times 102 = 102$  و  $1 \times 103 = 103$  و  $1 \times 104 = 104$  و  $1 \times 105 = 105$  و  $1 \times 106 = 106$  و  $1 \times 107 = 107$  و  $1 \times 108 = 108$  و  $1 \times 109 = 109$  و  $1 \times 110 = 110$  و  $1 \times 111 = 111$  و  $1 \times 112 = 112$  و  $1 \times 113 = 113$  و  $1 \times 114 = 114$  و  $1 \times 115 = 115$  و  $1 \times 116 = 116$  و  $1 \times 117 = 117$  و  $1 \times 118 = 118$  و  $1 \times 119 = 119$  و  $1 \times 120 = 120$  و  $1 \times 121 = 121$  و  $1 \times 122 = 122$  و  $1 \times 123 = 123$  و  $1 \times 124 = 124$  و  $1 \times 125 = 125$  و  $1 \times 126 = 126$  و  $1 \times 127 = 127$  و  $1 \times 128 = 128$  و  $1 \times 129 = 129$  و  $1 \times 130 = 130$  و  $1 \times 131 = 131$  و  $1 \times 132 = 132$  و  $1 \times 133 = 133$  و  $1 \times 134 = 134$  و  $1 \times 135 = 135$  و  $1 \times 136 = 136$  و  $1 \times 137 = 137$  و  $1 \times 138 = 138$  و  $1 \times 139 = 139$  و  $1 \times 140 = 140$  و  $1 \times 141 = 141$  و  $1 \times 142 = 142$  و  $1 \times 143 = 143$  و  $1 \times 144 = 144$  و  $1 \times 145 = 145$  و  $1 \times 146 = 146$  و  $1 \times 147 = 147$  و  $1 \times 148 = 148$  و  $1 \times 149 = 149$  و  $1 \times 150 = 150$  و  $1 \times 151 = 151$  و  $1 \times 152 = 152$  و  $1 \times 153 = 153$  و  $1 \times 154 = 154$  و  $1 \times 155 = 155$  و  $1 \times 156 = 156$  و  $1 \times 157 = 157$  و  $1 \times 158 = 158$  و  $1 \times 159 = 159$  و  $1 \times 160 = 160$  و  $1 \times 161 = 161$  و  $1 \times 162 = 162$  و  $1 \times 163 = 163$  و  $1 \times 164 = 164$  و  $1 \times 165 = 165$  و  $1 \times 166 = 166$  و  $1 \times 167 = 167$  و  $1 \times 168 = 168$  و  $1 \times 169 = 169$  و  $1 \times 170 = 170$  و  $1 \times 171 = 171$  و  $1 \times 172 = 172$  و  $1 \times 173 = 173$  و  $1 \times 174 = 174$  و  $1 \times 175 = 175$  و  $1 \times 176 = 176$  و  $1 \times 177 = 177$  و  $1 \times 178 = 178$  و  $1 \times 179 = 179$  و  $1 \times 180 = 180$  و  $1 \times 181 = 181$  و  $1 \times 182 = 182$  و  $1 \times 183 = 183$  و  $1 \times 184 = 184$  و  $1 \times 185 = 185$  و  $1 \times 186 = 186$  و  $1 \times 187 = 187$  و  $1 \times 188 = 188$  و  $1 \times 189 = 189$  و  $1 \times 190 = 190$  و  $1 \times 191 = 191$  و  $1 \times 192 = 192$  و  $1 \times 193 = 193$  و  $1 \times 194 = 194$  و  $1 \times 195 = 195$  و  $1 \times 196 = 196$  و  $1 \times 197 = 197$  و  $1 \times 198 = 198$  و  $1 \times 199 = 199$  و  $1 \times 200 = 200$  و  $1 \times 201 = 201$  و  $1 \times 202 = 202$  و  $1 \times 203 = 203$  و  $1 \times 204 = 204$  و  $1 \times 205 = 205$  و  $1 \times 206 = 206$  و  $1 \times 207 = 207$  و  $1 \times 208 = 208$  و  $1 \times 209 = 209$  و  $1 \times 210 = 210$  و  $1 \times 211 = 211$  و  $1 \times 212 = 212$  و  $1 \times 213 = 213$  و  $1 \times 214 = 214$  و  $1 \times 215 = 215$  و  $1 \times 216 = 216$  و  $1 \times 217 = 217$  و  $1 \times 218 = 218$  و  $1 \times 219 = 219$  و  $1 \times 220 = 220$  و  $1 \times 221 = 221$  و  $1 \times 222 = 222$  و  $1 \times 223 = 223$  و  $1 \times 224 = 224$  و  $1 \times$

واذن يكون السطح المنحنى للقطعة الكروية الناقصة

$$= ط \ ٢ هـ + ٢ هـ (٢ + ٢) + (٢ - ٢) =$$

ويمكن تحقيق ذلك بأن يوضع

(١)  $هـ = ٠$  وهذا يصير القطعة الكروية الناقصة حلقة مستوية دائرية أنصاف أقطارها الداخلة والخارجة  $١$   $٦$   $ب$  ويحول مقدار المساحة الى ط  $(٢ - ٢) ٦$

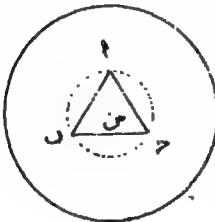
(٢)  $ب = ٠$  وهذا يصير القطعة الكروية الناقصة قطعة كروية تامة ويؤول مقدار السطح الى ط  $(هـ + ٢)$

وينبغى أن يلاحظ أن المقدار الموضوع تحت علامة الجذر يتركب كله من قوى زوجية لكل من  $١$   $٦$   $ب$   $هـ$  وأن هذه هي الدالة الوحيدة ذات الدرجة الرابعة المتماثلة بالنسبة لكل من  $١$   $٦$   $ب$  وهي التي تحقق الشروط (١) و (٢) أي التي تؤول الى ط  $(٢ - ٢)$  حينما يكون  $هـ = ٠$

وتؤول الى ط  $(هـ + ٢)$  حينما يكون  $ب = ٠$

### ٥٩ - المقياس الكروي

المقياس الكروي هو آلة تستعمل لتعيين نصف قطر أى كرة بقياس ارتفاع أى قطعة معلوم نصف قطرها



وهو في العادة ذو ثلاث أرجل منتهية بأسنان محددة مكوّنة لمثلث نصف قطر الدائرة المحيطة به معلوم ويساوى  $١$  ثم ان هناك بريمة ميكرومترية ذات خطوة قصيرة محورها على خط عمودي على مستوى الأرجل ومار بمرکز الدائرة

المحيطة بالمثلث وهذه البريمة يمكن أن تحرك الى أعلى أو أسفل حسب درجات معينة على كل من جانبي مستوى الأرجل وهى مدرجة بحيث ان المسافة التى تتحرك بها فى اتجاه المحور يمكن أن تقرأ فيبدأ بوضع الآلة على السطح المستوى ثم تحكم البريمة حتى ان تقطعها تمس السطح تماما وبعد ذلك توضع على السطح الكروى المطلوب تعيين نصف قطره بحيث ترتكز أرجله الثلاثة على دائرة صغيرة من الكرة نصف قطرها ١ وتدار البريمة الى أن تمس السطح بالضبط فقراءة البريمة تعطى فى هذه الحالة الارتفاع (هـ) للقطعة الكروية التى قاعدتها تلك الدائرة الصغيرة وحيث أن نصف قطر الكرة  $هـ$  يحسب من القانون  $٢ هـ = ١ + ٢ هـ$

وفى الشكل تكون ١ ٦ ب ٦ ح هـ أرجل الآلة ٦ س هـ نقطة وضع البريمة

### تمرينات (٧)

(١) عدد من الكرات رسم بحيث تكون أسطحها جميعا مارة بنقطة و المطلوب بيان أن جميع قطع هذه الكرات الناشئة عن تقاطعها بكرة مركزها و تكون جميعها متساوية فى المساحة أى تساوى مساحة الدائرة العظيمة لهذه الكرة الأخيرة

(٢) اذا رسمت كرتان متحدتا المركز و فالمطلوب بيان أن المناطق الناشئة من تقاطع تلك الكرات (المذكورة فى المسألة السابقة) المحصورة بين سطوح هاتين الكرتين المتحدتى المركز جميعها متساوية

(٣) المطلوب بيان أن مساحة السطح المنحنى من قطعة كروية يزيد عن مساحة قاعدتها بمساحة دائرة نصف قطرها مساو لارتفاع القطعة

(٤) إذا كانت أرجل المقياس الكروي مكتوبة لثلث متساوي الأضلاع كل ضلع من أضلاعه = ب فالمطلوب اثبات أن نصف قطر الكرة يمكن أن يعين بالقانون

$$2\sqrt{3} = \frac{b}{h} + h$$

(٥) المطلوب إيجاد نصف قطر كرة ممكن رسمها حول هرم منظم ارتفاعه ه وقاعدته مثلث متساوي الأضلاع طول كل منها ب

(٦) ارتفاع قطعة كروية يساوي ١,٢٧٥ سنتيمتر ونصف قطر قاعدتها ١,٢٥ سنتيمتر والمطلوب إيجاد نصف قطر الكرة

(٧) المطلوب إيجاد مساحة السطح المنحني لتلك القطعة

(٨) ارتفاع قطعة كروية ناقصة ٣ أمتار ونصف قطر قاعدتيها هما ٤ أمتار ٦ أمتار على التناظر والمطلوب إيجاد مساحة سطحها المنحني ونصف قطر الكرة

(٩) ارتفاع مخروط ناقص ٣ أمتار ونصف قطر قاعدتيه هما ٤ أمتار ٦ أمتار على التناظر والمطلوب إيجاد مساحة سطحه المنحني

(١٠) المطلوب إيجاد بعد رأس المخروط التام عن القطاع الواقع في وسط المخروط الناقص المذكور في المسألة السابقة

(١١) إذا رسم هرم ثلاثي منظم (أى أن كل وجه من أوجهه مثلث متساوي الأضلاع) داخل كرة فالمطلوب اثبات أن ارتفاعه يساوي  $\frac{4}{3}$  نصف قطر الكرة

(١٢) إذا رسمت كرة داخل هرم ثلاثي منظم فالمطلوب اثبات أن نصف قطرها يساوي ربع ارتفاع الهرم



(١٣) المطلوب إيجاد سطح هرم ثلاثي منتظم مرسوم حول كرة نصف قطرها  $u$  وإيجاد حجمه أيضا

(١٤) إذا ثقب ثقب اسطوانى نصف قطره  $٦$  سنتيمترات فى كرة نصف قطرها  $١٢$  سنتيمترا بحيث يمر بمركز الكرة فما مساحة السطح الكلى لهذا الجسم  
(١٥) إذا ثقب ثقب اسطوانى نصف قطره  $١$  فى كرة نصف قطرها  $u$  بحيث يمر بمركز الكرة فما المساحة السطحية للجسم

٦٠ - سطح الجسم الخلقى

ليكن  $u$  نصف قطر القطاع العرضى المستدير وليكن  $v$  نصف القطر المتوسط للحلقة كما فى بند ١٢٠

فاذا نظرنا للشكل المرسوم فى ذلك البند ورسم المستويان الماران بنقطتي  $u$  و  $v$  قريبين جدًا من بعضهما فان مجموع الشقق العليا والسفلى التى يرسمها كل من الخطين  $u$  و  $v$  يكون مساويا الى

$$u \times 2\pi m + v \times 2\pi m =$$

$$2\pi u (m + v) =$$

$$= 2\pi (u + v) (m + v)$$

$$[ \text{وذلك لأن } v = u ]$$

$$2\pi (u + v) =$$

$$\text{لأن } m + v = 2$$

ومن هنا يكون السطح الكلى للحلقة مساويا الى  $2\pi$  ط  $x$  محيط دائرة القطاع العرضى المستدير أى يساوى  $2\pi$  ط  $x$   $2\pi$  ط  $u = 4\pi u$  ب وينتج من ذلك أن سطح الحلقة يساوى سطح الاسطوانة المتحدة معها فى القطاع العرضى والتى ارتفاعها  $2\pi$  ط

أو سطح الحلقة يساوى المحيط ( ٢ ط ب ) لقطاعها العرضى المستدير  
مضروبا فى طول المسار ( ٢ ط ب ) المقطوع بمركز تلك الدائرة

٦١ - والنظرية العامة التى من أمثلتها سطح الحلقة هى

إذا دار أى شكل مستو حول محور خارج عنه إلا أنه فى مستويه فسطح  
الجسم المتولد بهذه الكيفية يساوى محيط الشكل مضروبا فى المسار المقطوع  
بنقطة معينة فى الشكل وتسمى «مركز المحيط» أو «مركز القوس»

[وفى الحلقة يكون مركز الدائرة المتحركة هو مركز محيطها واذن ففى هذه  
 الحالة تكون تلك النقطة هى «مركز المساحة» و «مركز المحيط»

(أنظر بند ١٢١) ولكن ذلك لا يكون عاما فى كل حال]

وهذه النظرية هى والنظرية المقابلة لها المتعلقة بحجم الأجسام المشابهة  
 لما ذكر (بند ١٢١) يظهر أنهما كان قد اكتشفهما فى أول الأمر بابوس  
 الرياضى الاسكندرى الشهير حوالى آخر القرن الرابع ثم نسبيا الى القرن السابع عشر  
 حينما وجدتهما الرياضى الجزويتى المسمى جولدينوس فى سنة ١٦٤٠ ميلادية  
 ونسبهما لنفسه بدون أن يعترف بأصلهما

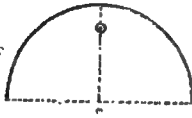
وقد أقام الدليل على هاتين النظريتين كافاليرى أستاذ الرياضيات فى بولونيا  
 وقتئذ الذى كان أيضا من الجزويت وهاتان النظريتان معروفتان باسم نظريتي  
 بابوس إلا أنه قد أطلق عليهما اسم نظريتي جولدينوس زمنا طويلا .

سلسلم فيما سياتى بصحة النظرية العامة المذكورة فيما يختص بالسطوح  
 الدورانية

٦٢ — إيجاد مركز محيط قوس نصف دائرة

إذا دار نصف الدائرة حول قاعدته فإن القوس يرسم سطحاً كروياً

فاذا فرضنا أن  $\pi$  نصف قطر نصف الدائرة  
وأن  $r$  هو بعد مركز قوسها عن القاعدة فبناء  
على النظرية :



$$\pi \times 2\pi = \text{سطح الكرة}$$

$$= 4\pi r^2$$

$$\text{وتكون } r = \frac{32}{\pi} = \frac{7}{11} \pi \text{ (تقريباً جداً)}$$

٦٣ — المطلوب إيجاد سطح كل من جأى الحلقة الدائرية المتولدين  
من نصفي المحيطين الداخل والخارج للدائرة الرأسية .

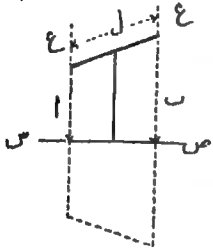
إذا أخذ الجزء الخارج فإنه يساوى طول نصف محيط الدائرة مضروباً  
في طول مساوٍ مركز المساحة .

$$= \pi \times 1 \times 2 \times (\frac{12}{2} + b) = 2\pi \times 1 \times b + 4\pi \times 1$$

وبمثل ذلك يكون الجزء الداخل مساوياً إلى  $2\pi \times 1 \times b - 4\pi \times 1$

ومن هنا يعلم أن السطح المتولد من نصف الدائرة الخارج يزيد عن  
نصف السطح الكلى بقدر سطح الكرة التي نصف قطرها يساوى نصف  
قطر الدائرة الرأسية للحلقة والجزء الداخل من السطح ينقص عن ذلك النصف  
بالمقدار نفسه

٦٤ — إيجاد السطح المنحني لمخروط ناقص بواسطة نظرية بابوس



لنفرض أن المخروط الناقص حادث من دوران خط ع ع الذي هو راسم المخروط الناقص وطوله ل حول محور س س في مستوي

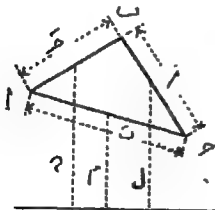
وليكن ا ب هما بعد نهايتي الخط المذكور ع ع عن المحور بحيث يكون ا ب هما نصف قطرَي قاعدتي المخروط الناقص

فمن الواضح أن مركز الخط ع ع هو نقطة منتصفه وبعد تلك النقطة عن المحور يساوي  $\frac{1}{2}(ا + ب)$  واذن فيكون بمقتضى نظرية بابوس

$$\text{سطح المخروط الناقص} = ط (ا + ب) ل$$

أى ان نظرية بابوس تعطى من أول الأمر مقدار السطح مساويا لطول الراسم مضروباً في طول المسار الذى تقطعه نقطة وسطه وينبى الطالب أن يمتحن الحالة التى يكون فيها الخط ع ع موازيا لمحور الدوران أو عموديا عليه

٦٥ — المطلوب إيجاد السطح المنحني لجسم متولد من دوران مثلث



حول محور خارجي موجود في مستوي

لنفرض أن ا ب ب ح هي أطوال الأضلاع ل م م د هي أبعاد نقط منتصفاتها عن المحور

$$\text{السطح} = ط (ا ل + ب م + ج د)$$

## تمريبات (٨)

(١) المطلوب إيجاد مساحة سطح حلقة قطرها الخارج والداخل هما ٦ سنتيمترات و ٤ سنتيمترات على التناظر

(٢) المطلوب إيجاد السطح اذا كان القطر الداخلى يساوى صفرا والقطر الخارجى يساوى ٦ سنتيمترات

(٣) المطلوب إيجاد مساحة أرضية خندق قطاعه العرضى نصف دائرة قطرها ١٠ أمتار وهذا الخندق يحيط بقلعة مستديرة وطول أعرض مسافة فيها ٥٠ مترا

(٤) المطلوب إيجاد مساحة خندق أبعاده كما سبق وقطاعه العرضى على شكل ٧ وعمق الخندق ٤ أمتار

(٥) المطلوب إيجاد مقدار الماء اللازم لملء أحد الخندقين السابق ذكرهما (١) ملاء تاما (٢) الى نصف ارتفاعه

(٦) جسم متولد من دوران مربع مرسوم عليه نصف دائرة قطرها يتحدد مع أحد أضلاع المربع والدوران حاصل حول الضلع المقابل من المربع وطول ضلع المربع وقطر نصف الدائرة يساوى ٦ سنتيمترات والمطلوب إيجاد حجم الجسم وسطحه

(٧) المطلوب إيجاد حجم جسم متولد من دوران مربع حول أحد أضلاعه اذا قطع من هذا المربع نصف دائرة قطرها أبعد ضلع عن محور الدوران وإيجاد سطح هذا الجسم أيضا مع فرض أن ضلع المربع يساوى ١

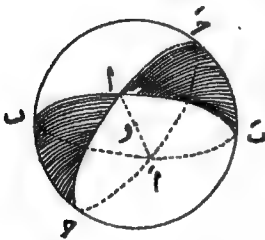
ومساح الأشكال المختلفة تساوى مربع نصف القطر مضروباً في بعض دوال متعلقة بالزوايا الواقعة بين الدوائر العظيمة أو الزوايا المركزية المقابلة للأضلاع

فإذا كانت الزوايا معلومة بالدرج وأجزاء الدرجة ثم أريد تحويلها إلى التقدير الدائري فيلزم استعمال المضروب  $\frac{\pi}{180}$  وذلك لأن ط هو التقدير الدائري للزاوية التي مقدارها  $180^\circ$

والمقدار التقريبي الموافق للاستعمال هو  $\frac{7}{4}$  إلا أنه أكبر من الحقيقة بقدر  $\frac{1}{4}$  في المائة فهناك مقدار أضبط من السابق وهو  $\frac{7}{4} (1 - \frac{1}{4})$

نصف الكرة المرتئ - في رسم الأشكال الكروية يفرض أن مستوى الورق يقسم الكرة إلى نصفين بحيث يكون القطاع المار بمستوى الورق دائرة عظيمة من الكرة والجزء من الكرة الواقع فوق هذا القطاع يسمى نصف الكرة المرتئ

### ٦٧ - مساحة الشقة الكروية



مساحة الشقة الكروية من أى كرة  
 $= 2\pi ه$  وفي هذا المقدار ه  
 هو التقدير الدائري لزاوية الشقة الكروية  
 وذلك لأن نسبة مساحة الشقة الكروية  
 إلى مساحة الكرة كلها كنسبة زاوية  
 الشقة الكروية إلى أربع زوايا قائمة

$$\text{أى أن} \quad \frac{\text{مساحة الشقة الكروية}}{\text{مساحة الكرة}} = \frac{ه}{\pi 2}$$

واذن يكون مساحة الشقة الكروية  $= \frac{ه}{\pi 2} (4\pi) = 2\pi ه$   
 فإذا كانت زاوية ه تساوى  $\frac{1}{4}$  من أربع زوايا قائمة وكان مقدار م عددا صحيحا فعبد من مثل هذم الشقة الكروية قدره م يتكوّن عنه جميع السطح الكروى

أى أنه اذا كان زاوية الشقة الكروية  $\angle م = ط$

تكون مساحة الشقة الكروية  $\angle م = ط$

فاذا وضعنا  $م = ط$  فاننا نحصل على الشقة الكروية التى زاويتها تساوى ط أى التى هى نصف كرة

٦٨ - فاذا رسمت الدوائر العظيمة التامة المشتملة على الشقة الكروية فان مساحة الشقة الكروية تساوى مجموع مساحتي الجزأين المثلثين اللذين فى نصف الكرة المرئى لأننا اذا نظرنا للشقة الكروية  $ا ب ح$  فمن الواضح أن الجزء الواقع تحت مستوى الورق يساوى مساحة  $ا ب ح$  وحينئذ فتكون مساحة الشقة الكروية مساوية لمجموع مساحتي المثلثين  $ا ب ح$   $ا ب ح$

ومساحة هذا الجزء المرئى من السطح المساوى لمساحة الشقة الكروية يمكن أن تعتبر أنها قد محيت بالجزء المنظور من دائرة عظيمة تتحرك حول المحور  $ا$  من الوضع  $ب ا ب$  الى الوضع  $ح ا ح$  مع ملاحظة أن الجزء المنظور من الدائرة يساوى نصف دائرة على الدوام الا أنه ليس على الدوام نصف الدائرة نفسه الا اذا اقترن الدوران حول  $ا$  بانزلاقها داخل  $ا$  فالمقصود من لفظ الجزء المنظور من الدائرة العظيمة الجزء الذى يكون منظورا من وقت الى آخر سواء كان الأمر كذلك فى الأوقات السابقة أم لا

٦٩ - مساحة المثلث الكروى

يمكن تعيين مساحة المثلث الكروى بدلالة الشقى الكروية التى زواياها هى نفس زوايا المثلث الكروى



وذلك لاننا اذا أخذنا أى مثلث كالمثلث ١ ب ح الموضوع بحيث تكون الدائرة العظيمة التى ب ح جزء منها موجودة فى مستوى الورق وأخذنا الأجزاء المكافئة المرئية للشق الثلاث فان الشقة التى زاويتها ١ (أى الجزء المظلل بالشكل السابق) + الشقة التى زاويتها ب + الشقة التى زاويتها ح فان ذلك يغطى المثلث ١ ب ح ثلاث مرات ويغطى الباقي من نصف الكرة المنظور مرة بحيث ان مجموعها يساوى نصف الكرة التام + ضعف مساحة المثلث

∴ ضعف مساحة المثلث = مجموع ثلاث شقى - سطح نصف الكرة

$$= ٢ ن (١ + ب + ح) - ٢ ط ن$$

$$\text{أى أن مساحة المثلث} = (١ + ب + ح - ط) ن$$

وفى هذا القانون مفروض أن ١ ٦ ب ٦ ح تقاس بالتقدير الدائرى فاننا قدرت بالدرج فان القانون يكون

$$\frac{ط}{١٨٠} (١ + ب + ح - ١٨٠) ن$$

أو يساوى بالتقريب

$$\frac{٧}{٤} (١ + ب + ح - ١٨٠) ن$$

ويرى من هذا القانون أن مجموع زوايا أى مثلث كروى يلزم أن يكون أكبر من زاويتين قائمتين وأنه كلما كانت هذه الزيادة أكبر كانت مساحة المثلث أكبر وزيادة مجموع هذه الزوايا عن زاويتين قائمتين تسمى الزيادة الكروية للمثلث

فانما كان مقدار كل زاوية = ٩٠° فان المثلث يؤول الى نصف سطح الكرة وتؤول رؤوس زوايا المثلث الى ثلاث نقط على الدائرة المحددة لنصف الكرة

٧٠ — المثلث الكروى المتساوى الأضلاع

ولكن اذا كان  $m = 6$  فان المساحة تنعدم (بالنسبة لمقدار  $n^2$ ) وكل زاوية تساوى في هذه الحالة  $60^\circ$  وفي جميع الأحوال الأخرى يجب أن تزيد كل من الزوايا المتساوية عن  $60^\circ$  وفي المثلثات الصغيرة جدًا أو في المثلثات المعتدلة المقدار ولكنها على كرات عظيمة جدًا لا تزيد الزوايا كثيرا عن  $60^\circ$  للواحدة أى لا يزيد المجموع كثيرا عن  $180^\circ$  وفي الكرات ذات نصف القطر غير المنتهى تؤول المثلثات الى مثلثات مستوية ويكون مجموع زواياها  $180^\circ$  مهما كان مقدار تلك المثلثات (بفرض أنها محدودة)

وإذا كان  $m = \epsilon$  فكل زاوية تكون قائمة وتؤول المساحة إلى  $\frac{1}{2} \pi$  أو  $\frac{1}{4}$  مساحة الكرة كلها

وإذا كان  $m = 3$  فكل زاوية تساوي  $120^\circ$  وتكون المساحة هي ربع الكرة كلها

وإذا كان  $m = 2$  فكل زاوية تساوى  $90^\circ$  ويكون المثلث نصف الكرة كما تقدم

وإذا كان  $m$  أكبر من واحد وأصغر من اثنين فإن الزوايا تكون متداخلة أى كل منها أكبر من  $90^\circ$  ويكون المثلث أكبر من نصف الكرة

وأصغر مقدار ممكن للكمية  $m$  هو  $1 \frac{1}{2}$  لأنه في هذه الحالة تكون المساحة  $E$  ط  $\theta$  ويكون المثلث مغطيا للكرة بتمامها وكل زاوية تكون في هذه الحالة  $300^\circ$

وينبغى للطالب أن يجتهد في رسم جميع هذه الصور المختلفة للمثلثات الكروية المتساوية الأضلاع على الكرة ويكفى أن تؤخذ لذلك كرة من كرات اللعب الصغيرة وفي أثناء عملية الرسم يحيد الطالب صعوبة في تحديد أطوال الأقواس المكونة لأضلاع المثلثات المختلفة فإذا اعتنى الطالب فإنه يستطيع أن يرسم المثلثات المرغوبة بالتقريب إلا أنه إذا أريد الضبط فمن الضروري وجود الارتباط بين الأضلاع والزوايا

ومن علم حساب المثلثات الكروية يمكن اثبات أنه إذا كانت الزاوية المركزية المقابلة لأحد الأضلاع المتساوية تساوى  $1^\circ$  وزاوية المثلث المقابلة لذلك الضلع هي  $1^\circ$  فإنه يكون

$$2^\circ \text{ جتا } 1 \frac{1}{4} = 1 \frac{1}{4}$$

$$\frac{\sin 2^\circ}{2} = 1 \quad \text{فإذا كان}$$

$$\text{فإنه يكون} \quad \text{جتا } 1 \frac{1}{4} = 1 \frac{1}{4} \text{ قتا } \frac{\sin 2^\circ}{2} \quad (\text{أنظر بند ٧٨})$$

## تمرينات (٩)

(١) إذا كانت زوايا مثلث كروى هي على التناظر  $١٣٠^\circ$   $١٠٠^\circ$   $٦٠^\circ$  ونصف قطر الكرة  $١٠$  أمتار فالمطلوب إيجاد مساحة المثلث باستعمال المقدار

$$\frac{\text{ط}}{١٨٠} = \frac{٧}{٤٠٠} = \frac{١}{٦٠} + \frac{١}{٢٠} \times \frac{١}{٦٠}$$

(٢) المطلوب تصحيح الجواب السابق بأن يطرح منه  $\frac{1}{3}$  في المائة ومقارنة الناتج الذى يوجد بما ينتج بأخذ  $\frac{\text{ط}}{١٨٠} = \frac{٣١٤١٦}{١٨٠} = \frac{١٧٠٤٧٢}{٦٠}$

(٣) إذا كانت كل زاوية من زوايا المثلث الكروى  $١٥^\circ$   $٧٥^\circ$  ونصف قطر الكرة  $١٠$  أمتار فالمطلوب إيجاد مساحة المثلث

(٤) إذا كانت مساحة المثلث تساوى  $\frac{1}{3}$  مساحة الكرة كلها فالمطلوب إيجاد مجموع زواياه بالدرج

(٥) إذا كانت كل زاوية من زوايا المثلث  $٢٢٠^\circ$  وجميع سطح الكرة  $١٠٠٠$  متر مربع فالمطلوب إيجاد مساحة المثلث

(٦) إذا كانت زوايا المثلث هي  $١$   $٦$   $٦$  ح وزوايا مثلث آخر هي  $٣٦٠^\circ$   $١$   $٦$   $٣٦٠^\circ$  ح فالمطلوب اثبات أن المثلثين معا يكونان سطح الكرة

(٧) إذا كانت زوايا مثلث مكمل زوايا مثلث آخر فالمطلوب إيجاد مجموع المساحتين

(٨) المطلوب اثبات أن مجموع الزوايا الثلاث الخارجة عن مثلث كروى أقل من أربع زوايا قائمة

(٩) المطلوب اثبات أن مساحة المثلث الكروى أقل من نصف الكرة بمساحة شقة زاويتها نصف مجموع الزوايا الخارجة من المثلث مع امتحان الحالات التى يكون فيها مجموع الزوايا الداخلة أكبر من  $٥٤٠^\circ$

(١٠) المطلوب إيجاد ضلع مثلث كروى متساوى الأضلاع كل زاوية من زواياه  $٢٤٠^\circ$

(١١) المطلوب إيجاد طول ضلع مثلث مستو متكوّن بتوصيل رؤوس المثلث الكروى فى المسألة السابقة بفرض نصف قطر الكرة يساوى مترا واحدا

(١٢) المطلوب إيجاد أضلاع مثلثات كروية متساوية الأضلاع زواياها هى  $\frac{2}{\pi}$  بفرض أن  $\pi = 3.141592653589793$

(١٣) المطلوب رسم هذه المثلثات على سطح الكرة (كرة اللعب) مع تعيين الأطوال الحقيقية للأقواس بأن يرسم على الورق دائرة قطرها يساوى قطر الكرة ثم وضع الزوايا السابق ذكرها فى المركز وطول الأوتار يعين الأبعاد الحقيقية التى يجب أن تنقل الى الكرة بواسطة البرجل

## ٧١ — مساحة المضلع الكروى

يمكن حساب مساحة المضلع الكروى بواسطة مساحة المثلث بتوصيل جميع رؤوس المضلع الى نقطة على سطح الكرة داخل المضلع لتقسيمه الى مثلثات عددها كعدد أضلاع الشكل

فاذا فرض أن عدد أضلاع الشكل هو  $n$

فمساحة أى مثلث = (مجموع زواياه الداخلة -  $\pi$ )  $\times$   $r^2$

واذن تكون مساحة المضلع = (مجموع زوايا المثلثات -  $n\pi$ )  $\times$   $r^2$

ولكن جميع زوايا المثلثات = الزوايا الداخلة للمضلع + الزوايا المشتركة الرأس (المساوية الى  $\pi$ )

واذن تكون مساحة المضلع = (مجموع زواياه الداخلة + ٢ط - دط) بوا  
وهذا المقدار يمكن اختصاره بأن يقدر بدلالة الزوايا الخارجة للمضلع لأن  
كل زاوية داخلية = ط - الزاوية الخارجة المجاورة لها واذن يكون مجموع  
الزوايا الداخلة = دط - مجموع الزوايا الخارجة واذن تكون

$$\text{مساحة المضلع} = (٢ط - \text{مجموع الزوايا الخارجة}) بوا$$

فاذا رمزنا لنصف مجموع الزوايا الخارجة بالرمز و

$$\text{فمساحة المضلع} = ٢(ط - و) بوا$$

ومن هنا يعلم أن مساحة المضلع أقل من نصف الكرة أى ٢ ط بوا  
فمساحة الشقة التى زاويتها نصف مجموع الزوايا الخارجة للمضلع

فاذا كانت أى زاوية من الزوايا الداخلة فى المضلع أكبر من زاويتين  
قائمتين فإن الزاوية الخارجة المجاورة لها تكون سالبة وقد يحتمل بناء على ذلك  
أن يكون مجموع الزوايا الخارجة نفسه سالبا إما بسبب الزوايا السالبة عن  
الموجبة وإما بسبب أنها جميعها سالبة ومن الواضح أنه فى هذه الحالة تكون  
الشقة الكروية التى ذكرت فى الفقرة السابقة سالبة ويكون المضلع الكروى  
أكبر من نصف الكرة بالمقدار الموجب المطابق لما ذكر وفى الواقع أنه اذا  
كان أى مضلع أصغر من نصف الكرة فإن الباقي من سطح الكرة يتكون عنه  
مضلع عدد أضلاعه كعدد أضلاع المضلع السابق ولكنه أكبر من نصف  
الكرة وتكون مقادير الزوايا الخارجة لأحد المضلعين مساوية لمقادير زوايا  
المضلع الثانى ومخالفة لها فى الإشارة



فاذا أريد معرفة المساحة التقريبية حينما يكون نصف قطر الكرة معلوما  
 فيمكن أن تستعمل المقدار  $\frac{7}{4}$  لأجل  $\frac{\pi}{180}$  واذاً تكون المساحة مساوية  
 الى  $\frac{3}{4} \frac{1}{180} (180 - \theta)$  نأ

فاذا طرحنا من النتيجة  $\frac{1}{4}$  في المائة فان الناتج يكون أضبط

### تمرينات (١٠)

(١) المطلوب بيان أن مجموع الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه  $n$  يلزم  
 أن يكون محصوراً بين  $(2 \pm 180)^\circ$  وما مقاديرها بين الناهيتين في حالة  
 الشقة الكروية والمثلث والشكل الرباعي والخماسي الكروي ثم اذا كانت هذه  
 الأشكال متساوية الزوايا فما هي المقادير النهائية لكل من الزوايا الداخلة

(٢) المطلوب إيجاد مساحة الشكل الرباعي الكروي الذي زواياه على التناظر  
 هي  $100^\circ 6' 110^\circ 6' 150^\circ 6' 200^\circ$  بفرض أن نصف قطر الكرة  
 ١٠ أمتار

(٣) مخمس كروي منتظم مساحته  $\frac{1}{8}$  مساحة الكرة فما مقدار احدى  
 زواياه الداخلة

(٤) مسدس كروي منتظم مساحته  $\frac{1}{4}$  مساحة الكرة والمطلوب إيجاد  
 مقدار زواياه

(٥) مضلع كروي منتظم عدد أضلاعه  $n$  ومساحته  $\frac{1}{4}$  مساحة الكرة  
 والمطلوب بيان أن كل زاوية خارجة من زواياه تساوى  $\frac{\pi}{2}$

(٦) مخمس كروي منتظم زاويته تساوى  $120^\circ$  فما نسبة مساحته الى  
 مساحة الكرة



(٧) اذا كان مضلع منتظم عدد أضلاعه  $d$  ومقدار زاويته الداخلية يساوى  $\frac{2}{m}$  فالمطلوب بيان أن مقدار  $m$  يمكن أن يكون مساويا لأى مقدار محصور بين النهايتين المحددين بالمعادلة  $\frac{1}{m} = \frac{1}{d} \pm \frac{1}{2}$  ثم ما هى المقادير النهائية للمقدار  $m$  فى حالة الشقة الكروية والمثلث الكروى الخ

(٨) المطلوب بيان أنه اذا كان  $m = 2$  فالمضلع يتحول الى نصف كرة وأنه اذا كان  $d$  أكبر من  $2$  فالمضلع يكون أقل من نصف كرة

(٩) المطلوب بيان أنه اذا كان مضلعان كرويان متطابقان متساويين فى عدد الأضلاع وكانت الزاوية الداخلة لأحدهما  $= \frac{2}{m}$  والزاوية الداخلة للثانى  $= \frac{2}{n}$  فان الأضلاع فى المضلعين تكون متساوية اذا كان  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$

### ٧٣ - المضلع الكروى المتساوى الأضلاع

يمكن وضع مساحة المضلع الكروى المتساوى الأضلاع والذي عدد أضلاعه  $d$  بصورة مهمة جدا ببيان زواياه كأنها كـ دور من زوايا قائمة

$$\text{فلتكن كل زاوية داخلية} = \frac{2}{m}$$

$$\text{فتكون الزاوية الخارجة} = \pi - \frac{2}{m}$$

$$\text{وتكون المساحة} = (\pi - \frac{2}{m}) + (\pi - \frac{2}{m}) + \dots + (\pi - \frac{2}{m})$$

$$= (\pi - \frac{2}{m}) \cdot d$$

ومن هنا يرى أنه اذا قسم المضلع الى مثلثات متساوية عددها  $d$  بتوصيل رؤوسه الى نقطة على سطح الكرة متساوية البعد عن جميع زواياه فان مساحة كل مثلث من هذه المثلثات تساوى

$$(\pi - \frac{2}{m}) \cdot \frac{1}{d}$$

وهذا الأمر واضح أيضا إذا نظرنا إلى زوايا أي مثلث من هذه المثلثات  
فإن الزاويتين المجاورتين للقاعدة  $= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$  وزاوية الرأس  $= \frac{\pi}{2}$   
ويمكن تعيين أكبر وأقل مقدار ممكن للكمية  $M$  في مضلع عدد أضلاعه  $n$   
بسهولة وذلك بالنظر إلى الحدين النهائيين لمساحة هذا المضلع وهو

$$D \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \pi n^2$$

وذلك لأن المساحة لا يمكن أن تكون أقل من الصفر ولا أكبر من سطح  
الكرة أي من  $4\pi n^2$  واذن فمقدار  $D \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right)$  يلزم أن يكون  
محسورا بين  $0$  و  $26$

وحيث أن يكون  $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$  محسورا بين  $0$  و  $26$  واذن فمقدار  $\frac{1}{4}$   
يكون محسورا بين  $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$   
فيكون  $M$  محسورا بين المقدارين  $\frac{22}{3 \pm 5}$

ومن هذين المقدارين المقدار  $M = \frac{22}{3+5}$  يجعل المضلع منطبقا للكرة  
 $M = \frac{22}{3-5}$  يجعل المضلع صغيرا صغيرا غير محدود  
وفي هذه الحالة الأخيرة تكون الزوايا مساوية لزوايا مضلع منتظم مستوي  
مساو له في عدد الأضلاع

#### ٧٤ - المضلع الشبكي المنتظم المرسوم على كرة

إذا كان  $M$  عددا صحيحا فيمكن أن ترسم على الكرة جملة مضلعات متساوية  
ومتشابهة بحيث تكون مضلعات عددها  $M$  متقابلة في كل رأس وبمقدار معين  
من  $0$  و  $6$   $M$  يمكن تغطية الكرة بشبكة من المضلعات متساوية ومتشابهة جميعا  
ولأجل إيجاد مقداري  $0$  و  $6$   $M$  اللذين يجعلان ذلك ممكنا نفرض أن الكرة  
يمكن تغطيتها تامة بعدد قدره  $n$  من تلك المضلعات

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$$

وإذا كان  $m = 2$  فيكون هناك مضلعان كل واحد منهما نصف كرة وهذا الأمر يكون صحيحا مهما كان مقدار  $d$  بحيث يمكن أن نحذف هذه الحالة أيضا لأنها تؤدي إلى نصفى كرة فلنبحث الآن جميع المقادير الممكنة للكمية  $m$  بعد المقدار  $m = 2$  بفرض أن مقدار  $d$  أكبر من 2

فالمعادلة التي تعطى مقدار  $\omega$  هي

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

ومن هنا يكون  $\frac{f}{f-1} = 9$

فإذا كان  $m = 3$  يكون  $u = 4$

واذا كان  $m = 4$  يكون  $n = 8$

وإذا كان  $m = 5$  يكون  $u = 20$

وانا كان  $m = 6$  تكون  $\infty$

ومن هنا (باهمال الحالة التي فيها  $\infty = \infty$  لأنها تعطي عددا غير محدود من مثلثات غير محدودة صفرا) يمكن أن نقسم سطح الكرة بالتماثل بثلاث طرق

$$\text{الى ٤ مثلثات زاوية كل منها } = \frac{\pi}{4} = ١٢٠^\circ$$

$$\text{الى ٨ مثلثات زاوية كل منها } = \frac{\pi}{8} = ٩٠^\circ$$

$$\text{الى ٢٠ مثلثا زاوية كل منها } = \frac{\pi}{20} = ٧٢^\circ$$

ولا يمكن التقسيم الى مثلثات متساوية بأى طريقة أخرى

(٢) وإذا كان  $d = ٤$  فان المضلعات تكون أشكالا رباعية والمقادير

$$\text{النهائية للكمية } m \text{ هي } \frac{8}{2+4} = \frac{2}{1+2}$$

فاذا صرفنا النظر عن المقدار  $m = ٢$  فان المقادير الممكن وجودها هي فقط

$m = ٣, ٦, ٤$  ولكن المقدار  $m = ٤$  يجعل الأشكال الرباعية صغيرة صفرا لانهاثيا

$$\text{والمعادلة التي تعطي مقدار } u \text{ هي } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} = u \quad \text{أى}$$

$$m = ٣ \text{ يكون } u = ٦ \quad \text{فانما كان}$$

$$m = ٤ \text{ يكون } u = \infty \quad \text{واذا كان}$$

ومن هنا (باهمال الحالة التي يكون فيها عدد الأشكال الرباعية لانهاثيا وكل واحد منها صغير صفرا لانهاثيا) يمكن تقسيم الكرة بالتماثل الى أشكال رباعية بطريقة واحدة فقط أى الى ستة أشكال رباعية وكل زاوية من زواياها  $= \frac{\pi}{4} = ٩٢^\circ$

(٣) وإذا كان  $d = ٥$  فالمضلعات تكون خماسية

وبمثل هذا يمكن أن يرى في هذه الحالة أن المقدار  $m = 3$  هو المقدار الصحيح الوحيد لما ما عدا الحالة غير الصحيحة التي فيها  $m = 2$  وأنه حينما يكون  $m = 3$  يكون  $u = 12$

واذن فالكرة يمكن أن تقسم الى مخمسات متساوية منتظمة بطريقة واحدة فقط وهي القسمة الى اثني عشر مخمسا متساوية وزاوية كل واحد من هذه المضلعات  $= \frac{2}{3} \pi = 120^\circ$

(٤) وإذا كان  $d = 6$  فالمقدار الصحيح الفريد للكمية  $m$  (ماعد المقدار  $m = 2$ ) هو  $m = 3$  ويرى أن هذا يعطى عددا غير محدود من مسدسات صغيرة صفرا غير متناه واذن فلا يمكن تقسيم الكرة بالتماثل الى عدد محدود من المسدسات

(٥) وإذا كان  $d < 6$  فلا يمكن أن يوجد أى مقدار صحيح للكمية  $m$  الا المقدار  $m = 2$  وهو غير صحيح

فاذا جمعت الأحوال المختلفة ورتبت على حسب عدد الأقسام فان التقسيمات المتماثلة للكرة تكون كما يأتى :

٤	مثلثات	$(m = 3, d = 3)$
٦	أشكال رباعية	$(m = 3, d = 4)$
٨	مثلثات	$(m = 4, d = 3)$
١٢	مخمسات	$(m = 3, d = 5)$
٢٠	مثلثات	$(m = 5, d = 3)$

وذلك عدا الأحوال الخصوصية لنصفى كرة ( $m = 2, d = 2$ ) تساوى (أى عدد صحيح) ولأى عدد من الشقوق المتساوية ( $d = 2, m = 6$ ) تساوى (أى عدد صحيح)

وفضلا عن هذه الأحوال فإن هناك أحوالا لتقسيم سطح الكرة الى عدد لا نهاية له من المثلثات والأشكال الرباعية والمسدسات المتناهية في الصغر ويظهر للطالب أن هذه الأحوال هي مماثلة لأحوال التقسيمات المتماثلة الممكنة لأي سطح مستو ولا نتكلم على هذه الأحوال فيما يأتي

٧٥ — وهناك ارتباطات بسيطة ومفيدة بين عدد المضلعات  $u$  وعدد الرؤوس  $v$  وعدد الأضلاع  $e$

فمثلا لكل مضلع أضلاع عددها  $d$  الا أن كل ضلع يكون مشتركا بين مضلعين

واذن يكون  $2v = u$

ثم أن كل مضلع له رؤوس عددها  $d$  الا أن عدد المضلعات التي تتقابل في الرأس الواحدة يساوي  $m$

واذن يكون  $me = u$

أيضا  $2v = me = u$

ثم انه بسبب أن كلا من  $v$  و  $e$  و  $u$  يلزم أن تكون أعدادا صحيحة فالمقادير الثلاثة المتساوية المبينة فيما تقدم يلزم أن تكون قابلة للقسمة على المضاعف البسيط للقادير  $m$  و  $d$  و  $2$  فاذا رمزنا لهذا المضاعف البسيط بالرمز  $(m, d, 2)$  فانه يكون

$$2v = me = u = k(m, d, 2)$$

وفي هذه المعادلة يكون مقدار  $k$  عددا صحيحا أيا كان وستعين مقداره هنا وقد ثبت في بند ٧٤ أن

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{واذن يكون}$$

$$(ل \text{ هنا عدد صحيح}) \quad \frac{ل}{(٢٦٥٦٢)} =$$

$$\frac{(٢٦٥٦٢)}{ل} = ٣ \quad \text{فيكون}$$

$$\text{لكن قسطين قريبا أن } ٣ = ك (٢٦٥٦٢)$$

$$\text{واذن يكون } ٣ = ل$$

$$\text{أى أنه إما أن يكون } ك = ١ \text{ أو } ٢ = ل \text{ أو } ٣ = ل$$

ويرى بالاختبار أن  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  لا يمكن أن يكون مساويا الى

$$\frac{٢}{(٢٦٥٦٢)} \text{ الا اذا كان } م \text{ أو } د \text{ يساوى } ٢ \text{ والآخر عدد فردى وتلك هى}$$

حالة أنصاف الكرة أو الشق الكروية واذن فيجب رفض المقدار  $ل = ٢$

$$\text{ويكون الحل الوحيد هو } ك = ٢ \text{ أو } ٣ = ل$$

$$\frac{١}{(٢٦٥٦٢)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad \text{واذن يكون}$$

$$\frac{١}{(٢٦٥٦٢)} = \frac{1}{٢} - \frac{1}{٣} = \frac{1}{٦} \quad \text{مى}$$

## ٧٦ — الخمسة الكثيرات السطوح المنتظمة الكروية

ان المعادلة الأولى المذكورة في آخر بند ٧٥ تعين جميع المقادير الممكنة لكتبي م ٦ د التي سبق بحثها والمعادلة الثانية تممكتنا من معرفة عدد الأضلاع والرؤوس والمضلعات في كل حالة ومقدار د يعين عدد الأضلاع في كل مضلع ومقدار م يعين عدد الزوايا التي تتقابل في كل رأس ويقال للرأس ثلاثية أو رباعية أو خماسية على حسب ما يكون عدد الزوايا المتقابلة فيها ٣ أو ٤ أو ٥

### (١) الجسم ذو الأربعة الأوجه الثلاثية

حينما يكون م = ٣ د = ٣ يكون (م ٦ د ٢٦) مساويا ٦  
واذن يكون  $٣ = ٤ د = ٤ د = ٤$

أى ان المضلع الشبكي يتركب من أربعة مثلثات تشتمل على أربع رؤوس مثلثية وستة أضلاع وهذه الشبكة تسمى شبكة كروية منتظمة ذات أربعة أوجه ثلاثية ومقدار كل زاوية من زوايا الرؤوس ١٢٠ وزاوية كل ضلع (أى الزاوية المركزية المقابلة للضلع) تساوى  $\frac{1}{3} \times ١٠٩$

### (٢) الجسم ذو الستة الأوجه الرباعية

حينما يكون م = ٣ د = ٤ فمقدار (م ٦ د ٢٦) يساوى ١٢  
واذن يكون  $٣ = ٦ د = ٨ د = ١٢$

وهذه الشبكة تسمى شبكة منتظمة كروية ذات ستة أوجه رباعية لأن المضلعات أو الأوجه المشتتة عليها هي ستة ولها ثمانية رؤوس ثلاثية



واثنا عشر ضلعا ومقدار كل زاوية من زوايا الرأس  $120^\circ$  وستبرهن فيما سياتى على أن زوايا الأضلاع كل منها  $\frac{1}{4} 70^\circ$  أى الزاوية المكملة لزاوية الشكل ذى الأربعة الأوجه الثلاثية

### (٣) الجسم ذو الثمانية الأوجه الثلاثية

حينما يكون  $م = ٤ = ٦ = ٣$  فققدار (م ٦ ٦ ٢ ٦) هو ١٢

واذن يكون  $١٢ = ٨ = ٦ = ٦ = ٦ = ١٢$

وهذه الشبكة تسمى شبكة منتظمة كروية ذات ثمانية أوجه ثلاثية وستة رؤوس رباعية واثنى عشر ضلعا

وكل من زوايا الرؤوس  $90^\circ$  وكذلك زوايا الأضلاع ومن الواضح أنه يمكن الحصول على هذا الشكل برسم ثلاث دوائر عظيمة على سطح الكرة متعامدة بعضها على بعض

### (٤) الجسم ذو الاثنى عشر وجها الخماسى

حينما يكون  $م = ٣ = ٦ = ٥$  يكون مقدار (م ٦ ٦ ٢ ٦) مساويا الى ٣٠

واذن يكون  $١٢ = ٦ = ٢٠ = ٢٠ = ٢٠ = ٣٠$

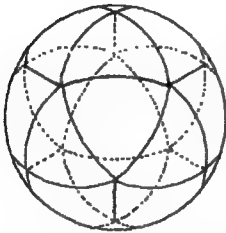
وهذا الشكل يسمى الشكل ذا الاثنى عشر وجها الكروى المنتظم وله ١٢ وجها خماسيا و ٢٠ رأسا مثلثيا و ٣٠ ضلعا

ومقدار كل زاوية من زوايا الرؤوس  $120^\circ$  وستبرهن فيما سياتى على أن زوايا الأضلاع  $\frac{4}{5} ٩١^\circ$

## (٥) الجسم ذو العشرين وجها الثلاثي

حينما يكون  $م = ٥$   $٥ = ٦ = ٣$  فمقدار (م)  $٦ = ٢٦$  يساوي ٣٠

واذن يكون  $٣ = ٢٠ = ٦ = ١٢ = ٤ = ٣٠$



وهذا الشكل يسمى ذا العشرين وجها  
الكروي المنتظم وله عشرون وجها مثلثيا  
واثنا عشر رأسا خماسيا وثلاثون ضلعا وزاوية  
كل رأس فيه  $٧٢^\circ$  وزوايا أضلاعه  $٩٣ \frac{1}{4}^\circ$   
وهو موضح في الشكل

ويجب على الطالب أن يرسم هذه  
المضلعات الشبكية الخمسة المنتظمة على

كرات بأدق ما يمكنه ولأجل الحصول على أوتار الأضلاع التي يحتاج إليها  
في إيجاد الأطوال المضبوطة للأضلاع بواسطة البرجل يلزم أن ترسم دائرة  
عظيمة من الكرة بمقياس الطبيعة ثم ترسم زوايا الأضلاع في مركز الكرة فأوتار  
الأقواس المتحصلة بهذه الكيفية تكون هي الأوتار المطلوبة

٧٧ - ولنختم هذا الفصل بمبحث خاص بالارتباط بين الزوايا والأضلاع  
لمضلع كروي منتظم وتطبيق ذلك على الأشكال الشبكية الخمسة المنتظمة

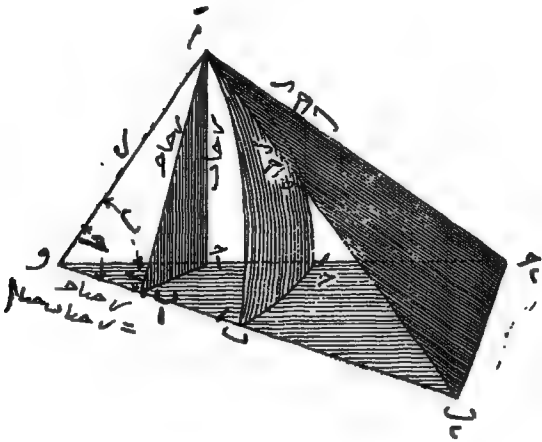
## تمهيد

ليكن  $أ ب ح$  مثلثا كرويا قائم الزاوية في  $ح$  وليكن نقطة ومركز الكرة

فترسم الخط  $أ ح$  عموديا على  $و ح$   $أ ب$  عموديا على  $و ب$

فيكون  $ب ح$  عموديا على  $و ب$   $أ ح$  وتكون الزاوية  $أ ب ح$

مساوية لزاوية  $ب$  في المثلث



ولنسم  $\hat{A}$   $\hat{B}$   $\hat{C}$  عمودين على  $\hat{A}$  فيقابلان  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  وح في تقطعي  
 $\hat{B}$   $\hat{C}$  على التناظر  
 واذن يكون  $\hat{B}$   $\hat{C}$  عمودا على  $\hat{A}$   $\hat{C}$  والزاوية  $\hat{B}$   $\hat{A}$   $\hat{C}$  تساوي  
 الزاوية  $\hat{A}$  من المثلث  
 ولنرمز للزوايا التي رأسها نقطة و المقابلة لأضلاع المثلث  $\hat{A}$   $\hat{B}$   $\hat{C}$   
 بحروف  $a$   $b$   $c$

فحينئذ اذا نظرنا الى المثلثات القائمة الزاوية  $\hat{A}$   $\hat{B}$   $\hat{C}$  و  $\hat{A}$   $\hat{B}$   $\hat{C}$   
 فاننا نجد المعادلة

$$(١) \quad \hat{A} = \hat{B} + \hat{C} - \pi$$

ثم من المثلث  $\hat{A}$   $\hat{B}$   $\hat{C}$  يوجد

$$(٢) \quad \hat{A} = \hat{B} + \hat{C} - \pi$$



واذن فالمثلث و و ك المبين بالرسم هو مثلث كروى قائم الزاوية فى ك  
وزاوية و =  $\frac{\pi}{m}$  والزاوية التى رأسها فى و =  $\frac{\pi}{s}$  واذن فيستنتج من  
المعادلات (٤)، (٥)، (٦) المتقدمة مع ملاحظة أن نقطة و هى مركز الكرة -

$$\text{جنا و ك} = \text{جنا } \frac{\pi}{s} \div \text{حا } \frac{\pi}{m}$$

$$\text{جنا و و ك} = \text{جنا } \frac{\pi}{m} \div \text{حا } \frac{\pi}{s}$$

$$6 \text{ جنا و و ك} = \text{ظنا } \frac{\pi}{m} \times \text{ظنا } \frac{\pi}{s}$$

والمعادلة الأولى من هذه المعادلات توصلنا الى ايجاد مقدار و ك ثم  
ايجاد و ك والمعادلة الثانية والثالثة يحتاج اليها فى المضلعات الآتية فى الفصل التالى

٧٩ - ولنبحث الآن عن أطوال أضلاع المضلعات الخمسة الكروية  
الشبكية المنتظمة (بدلالة الزوايا المركزية المقابلة لها)

(١) فى الشكل ذى الأربعة أوجه المثلثية يكون  $m = s = 3$

$$\text{واذن يكون جنا و ك} = \text{جنا } \frac{\pi}{3} \div \text{حا } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$6 \text{ جنا و ك} = 2 \text{ جنا و ك} = 1$$

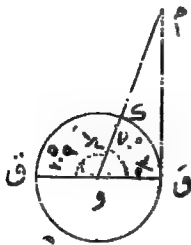
واذن يكون

$$\text{جنا و ك} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ومن هنا يكون و ك} = 90^\circ - \frac{1}{3} \times 180^\circ = 70^\circ \text{ (تقريباً)}$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{3} =$$

وهذا الرسم قد أنشئ يجعل  $m = s = 3$  و



(٢) وفي الشكل الكروي ذى الستة أوجه يكون  $م = ٣$   $٦ = د$   $٤ =$  واذن يكون

$$جنا و ك = جتا \frac{\pi}{4} \div جتا \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$جنا و ك = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$و ك = \frac{1}{\sqrt{3}} = ٥٧^\circ$$

وهذه الزاوية هي مكملة الزاوية التي وجدت في الحالة السابقة واذن فتكون الزاوية المطلوبة هي الزاوية  $و ك$  في الشكل المتقدم

(٣) وفي الشكل ذى الثمانية أوجه الكروي يكون  $م = ٤$   $٦ = د$   $٣ =$  واذن يكون

$$جنا و ك = جتا \frac{\pi}{3} \div جتا \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$و ك = \frac{1}{\sqrt{2}} = ٤٥^\circ$$

$$و ك = ٩٠^\circ$$

(٤) وفي الشكل الكروي ذى الاثنى عشر وجهها يكون  $م = ٣$   $٦ = د$   $٥ =$

$$و يكون جتا و ك = جتا \frac{\pi}{5} \div جتا \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$٦ جتا و ك = \frac{1}{\sqrt{5}} = ٥٢^\circ$$

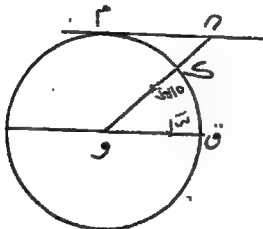
$$و يكون و ك = \frac{4}{5} = ٤١^\circ \text{ تقريبا}$$

ومقدار  $حا و ك$  يساوى  $\frac{2}{3}$

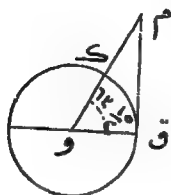
واذن فيكون الرسم كما هو موضح في الشكل وفيه يكون ود

$$\frac{2}{3} و ٦ م د يكون موازيا$$

للخط و ن



(هـ) وفي الشكل الكروي ذى العشرين وجها يكون  $م = ٥٦٥ = ٣$  واذن يكون جتا  $ق$  و  $ك = جتا \frac{1}{3} \div جتا \frac{1}{5}$



$$\frac{\sqrt{572+10}}{2} =$$

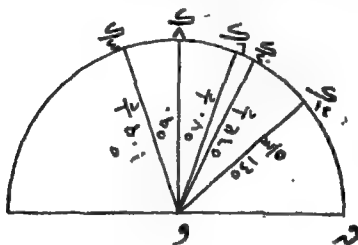
ومن هنا يكون ظا  $ق$  و  $ك = ٢$

واذن يكون جتا  $ق$  و  $ك = \sqrt{\frac{1}{5}}$

أى أن  $ق$  و  $ك = \frac{1}{4} ٩٣$  تقريبا

وقد رسم هذا الشكل بأخذ  $ق = ٢$  و  $ق$

والشكل التالى يبين أطوال الأقواس الخاصة بالزوايا السابق ذكرها لكرة نصف قطرها بوصة وربع أى بحجم كرة اللعب



### تمريعات (١١)

- (١) المطلوب إيجاد زوايا مثلث كروى منتظم مساحته تساوى  $\frac{1}{4}$  مساحة الكرة وإيجاد طول ضلع هذا المثلث أيضا (أى مقدار الزاوية المركزية المقابلة له)
- (٢) المطلوب إيجاد زوايا وأضلاع شكل رباعى كروى منتظم مساحته  $\frac{1}{4}$  مساحة الكرة

(٣) المطلوب إيجاد زوايا وأضلاع خمس كروى منتظم مساحته  $\frac{1}{11}$  مساحة الكرة

(٤) المطلوب إيجاد زوايا وأضلاع سدس كروى منتظم مساحته  $\frac{1}{11}$  مساحة الكرة

(٥) المطلوب إيجاد أطوال أضلاع مثلث كروى متساوى الساقين وزواياه  $60^\circ 6' 45''$  (وقسمته الى مثلثين كرويين قائمى الزاوية بقوس مار برأس الزاوية الثالثة ويقطع القاعدة)

(٦) اذا وصلت نقط مراكر الأوجه المتجاورة (و) من شكل كروى ذى أربعة أوجه مثلثة منتظم فالمطلوب بيان أن الشكل الحادث يكون شكلا ذا أربعة أوجه مثلثة كرويا منتظما أيضا

(٧) اذا وصلت نقط مراكر الأوجه المتجاورة من شكل سداسى كروى منتظم فالمطلوب بيان أن الشكل المتكون بهذه الصورة هو شكل ذو ثمانية أوجه كروى منتظم وأن رؤوس الشكل ذو الستة أوجه تكون هى النقط المركزية لأوجه الشكل ذى الثمانية الأوجه المنتظم الحادث

(٨) المطلوب اثبات أنه اذا وصلت النقط المركزية للأوجه المتجاورة لشكل كروى منتظم ذى اثني عشر وجهها فان الشكل الحادث يكون شكلا كرويا منتظما ذا عشرين وجها — وأنه اذا كان الشكل المفروض ذا عشرين وجها منتظما فان الشكل الحادث يكون ذا اثني عشر وجهها منتظما

(٩) من الارتباطات الميينة فى آخر بند ٧٥ المطلوب اثبات أن  $ق + ع = ٢$  واذا كر أمثلة لذلك فى الأحوال المختلفة لكثيرات السطوح المنتظمة



## الفصل الرابع

### كثيرات الأوجه المستوية المنتظمة

٨٠ — اذا رسم مستو مماس للكرة في نقطة و (أنظر الشكل المرسوم في بند ٧٨) وفرض خط يمر على الدوام بمركز الكرة ويمر أيضا حول محيط المضلع الكروي المنتظم و ك مر فان هذا الخط يرسم على المستوى كثيرا أضلاع متظا عدد أضلاعه كعدد أضلاع المضلع الكروي ومركزه نقطة و

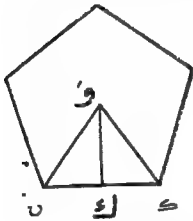
وبسبب التماثل يمكن أن يرى أنه اذا رسم كثير سطوح كروي متظم كما في الفصل السابق وكونت كثيرات الأضلاع المستوية الخاصة به كما ذكر فان هذه المضلعات المستوية يتكوّن عنها مجتمعة سطح مقبول أوجه جميعها مضلعات منتظمة متساوية ومتشابهة مماسة جميعها لسطح الكرة في نقط مراكزها التي هي أيضا مراكز المضلعات الكروية المناظرة لها

والجسم المحصور بهذه الكيفية يسمى كثيرا الأوجه المستوية المتظم أو يسمى كثيرا الأوجه المتظم باختصار

ويرى مما تقدم في الفصل السابق أن هناك خمسة أحوال ممكنة الوجود وهي ذو الأربعة أوجه وذو الستة أوجه وذو الثمانية الأوجه وذو الاثنى عشر وجها وذو العشرين وجها

وأوجه الجسم الرباعي والمثلث وذى العشرين وجها هي مثلثات متساوية الأضلاع وأما أوجه الجسم السداسى فهي مربعات بحيث يكون ذو الستة الأوجه مكعبا أما أوجه ذو الاثنى عشر وجها فهي مخمسات منتظمة

والزوايا التي رأسها في مركز الكرة والتي تقابلها الأضلاع المقابلة لها هي الخطوط  $ق ك$  و  $ك و$  من كثير الأضلاع المستوى هي مساوية للزوايا التي تقابلها الخطوط المناظرة لها في المضلع الكروي المناظر له وذلك لأن النقط  $ق ك$  و  $ك و$  تحصل في المضلع المستوى بتوصيل خطوط من



مركز الكرة الى النقط المناظرة وهي  $ق ك$  و  $ك و$  من المضلع الكروي واذن

$$\begin{aligned} \text{يكون جتا } ق و ك &= \text{جتا } \frac{\frac{\pi}{2}}{د} \div \text{جا } \frac{\pi}{م} \\ \text{ك جتا } و و ك &= \text{جتا } \frac{\frac{\pi}{2}}{م} \div \text{جا } \frac{\pi}{د} \\ \text{ك جتا } ق و و &= \text{ظنا } \frac{\pi}{م} \times \text{ظنا } \frac{\pi}{د} \end{aligned}$$

والزوايا الخارجة المحصورة بين وجهي مضلعين متجاورين  $= ٢ و ك$  لأنه اذا كان  $و ك$  هما مركزا المضلعين أى نقط تماسهما بالكرة فالزاوية الداخلة المحصورة بين هذين المستويين هي  $و ك$  وهي الزاوية المكملة لزاوية  $و و و$  لأن زاويتي  $و ك$  و هما زاويتان قائمتان وأيضا فان  $و و و = ٢ و ك$  وهذا ما يثبت هذا الغرض

والزاوية المركزية التي يقابلها الضلع  $ق ك = ٢ ق و ك$

٨١ - وينبغي أن يلاحظ أن ذا الستة الأوجه المنتظم أو المكعب وذا الثمانية الأوجه يكونان زوجا من كثيرات الأوجه ذا خواص متعاكسة وذلك لأنه في المكعب  $م = ٣ ك د = ٤$  وفي ذى الثمانية الأوجه يكون  $م = ٤ ك د = ٣$  فاذا بحثنا في الارتباطات

$$٢ = م = ع = ٥ = ٥ = \text{ضعف المضاعف البسيط}$$

$$\text{والارتباطات} \quad \text{ح ا ق وك} = \text{ح ا ط} \div \frac{\text{ط}}{\text{م}} \div \text{ح ا ط}$$

$$\text{ح ا و وك} = \text{ح ا ط} \div \frac{\text{ط}}{\text{م}} \div \text{ح ا ط}$$

فاننا نرى أن عدد الأضلاع واحد في الجسمين أى ١٢

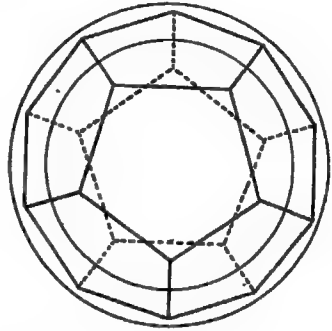
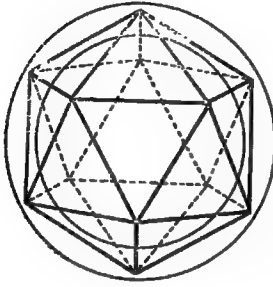
وأن عدد الرؤوس في الجسم ذى الثمانية الأوجه يساوى عدد أوجه المكعب أى يساوى ٦

وأن عدد الرؤوس في المكعب يساوى عدد الأوجه في ذى الثمانية الأوجه  
أى ٨

وأن الزاوية الخارجة الواقعة بين وجهين متجاورين من الجسم ذى الثمانية الأوجه تساوى الزاوية المركزية في و المقابلة لأى ضلع من أضلاع المكعب  
أى تساوى  $\frac{1}{4} \cdot 90^\circ$

وان الزاوية الخارجة الواقعة بين وجهين متجاورين من المكعب تساوى الزاوية المركزية في و والتي تقابل ضلع ذى الثمانية أوجه أى تساوى  $90^\circ$  ويرى أيضا (بالالتفات الى معنى م ٦ د) أن هناك أربع زوايا مستوية متقابلة في رأس من رؤوس ذى الثمانية الأوجه ومناظرة للأضلاع الأربعة التى في وجه من أوجه المكعب وثلاث زوايا مستوية متقابلة في رأس من رؤوس المكعب وهى مناظرة للأوجه الثلاثية من الشكل ذى الثمانية الأوجه

وبمثل ذلك يرى أن ذا الاثنى عشر وجهها وذا العشرين وجهها لها خواص متعاكسة لأنه يكون في واحد منهما م = ٣ ٦ د = ٥ وفى الثانى م = ٥ ٣ = ٦ د = ٣



فعدد الأضلاع في كل منهما يساوى ٣٠

وعدد الرؤوس في ذى العشرين وجها = عدد الأوجه في ذى الاثنى عشر وجها = ١٢

وعدد الرؤوس في ذى الاثنى عشر وجها = عدد الأوجه في ذى العشرين وجها أى عشرين

والزاوية الخارجة الواقعة بين الوجهين المتجاورين من ذى العشرين وجها تساوى الزاوية المركزية في و المقابلة لضلع ذى الاثنى عشر وجها أى تساوى  $\frac{4}{5} \times ٤١^\circ$

والزاوية الخارجة الواقعة بين وجهين متجاورين من ذى الاثنى عشر وجها تساوى الزاوية المركزية في و وتقابل ضلع ذى العشرين وجها أى تساوى  $\frac{1}{١٣} \times ٩٣^\circ$  وأيضا فانه يستتج من معنى م ٦ د أن نحس زوايا مستوية نجتمع في رأس ذى العشرين وجها تناظر الأوجه الخمسة لذى الاثنى عشر وجها وأن ثلاث زوايا مستوية تتقابل في رأس من رؤوس ذى الاثنى عشر وجها وهى مناظرة للأوجه المثلثية لذى العشرين وجها

وقد بينا رسم هذين الجسمين في الأشكال مع الكرات المحيطة بها والمحاطة بها وقد يحتمل أن يرى الطالب أن مما يفيد أنه يختبر الأشكال الحقيقية للجسمات من رسوماتها وأن ينظر لها بعين واحدة فقط (وقد حصل تساهل في رسم الأشكال بمقاييس مختلفة وكان الأحسن أن نرسم كلها بنسبتها إلى كرة واحدة)

## ٨٢ - سطح كثير الأوجه المنتظم

يمكن بيان مساحة سطح كثير الأوجه المنتظم بدلالة  $n$  والزاوية  $\alpha$  و  $\beta$  ومقدار هذه الزاوية يمكن إيجاده من المعادلة

$$\beta \sin \frac{\alpha}{2} = \alpha \sin \frac{\beta}{2}$$

فاذا رمزنا لهذه الزاوية بالرمز  $\theta$  فإنه يكون

$$\beta \sin \theta = \alpha \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\text{ومساحة المثلث } \alpha \sin \theta = \frac{1}{2} (\alpha \sin \theta) \text{ حـا } \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\text{واذن تكون مساحة المضلع } = \frac{\alpha^2}{2} \sin \theta \text{ حـا } \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\text{ومساحة كثير الأوجه } = \frac{\alpha^2}{2} \sin \theta \text{ حـا } \frac{\alpha^2}{2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} \sin \theta \text{ حـا } \frac{\alpha^2}{2}$$

وفي هذا القانون  $L$  هو المضاعف البسيط للكميات  $(\alpha^2 \sin \theta)$  وهو

يساوى عدد أضلاع كثير الأوجه

وهذا المقدار المبين للمساحة يمكن أن يكتب بهذه الصورة

$$L \sin^2 \frac{\alpha}{2} \text{ حـا } \frac{\alpha^2}{2} (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2})$$

$$\text{فـا } \frac{\alpha^2}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$$

لأن

وأسطح كثيرى الأوجه المتعاكسين المرسومين على كرة واحدة يرتبطان ببعضهما ارتباطا بسيطا وذلك لأن جميع العوامل فى كل منهما واحدة ما عدا  $\frac{ط ٢}{٥}$  واذن يكون

$$\frac{\frac{ط ٢}{٣} ح}{\frac{ط ٢}{٤} ح} = \frac{\text{سطح الجسم ذى الثمانية أوجه}}{\text{سطح المكعب}}$$

$$\frac{\frac{ط ٢}{٣} ح}{\frac{ط ٢}{٥} ح} = \frac{\text{سطح ذى العشرين وجها}}{\text{سطح ذى الاثنى عشر وجها}} \quad 6$$

٨٣ - حجم كثير الأوجه المنتظم  
يمكن الحصول على حجم كثير الأوجه المنتظم من سطحه بضربه فى  $\frac{١}{٣}$  من المراد بالرمز من نصف قطر الكرة المرسومة داخله وذلك لأنه يمكن تقسيمه الى أهرام قواعدها هى أوجه كثير الأوجه ورؤوسها فى مركز الكرة وهذه النظرية صحيحة أيضا فى كثير الأوجه غير المنتظم بشرط أن يكون ممكنا رسم كرة تمس جميع أوجهه ومن هنا يرى أن أحجام كثيرات الأوجه المرسومة على الكرة مناسبة لمساح أوجهها

ويمكن تحصيل حجم ذى الثمانية الأوجه المنتظم المرسوم على الكرة التى نصف قطرها من مباشرة بهذه النظرية لأن

$$\frac{\text{حجم ذى الثمانية الأوجه المنتظم}}{\text{حجم المكعب}} = \frac{\text{سطح ذى الثمانية الأوجه}}{\text{سطح المكعب}}$$

$$\frac{٣٧}{٢} = \frac{\frac{ط ٢}{٣} ح}{\frac{ط ٢}{٥} ح} =$$

ولكن حجم المكعب  $= (٢ \text{ م})^3 = ٨ \text{ م}^3$

فحجم ذى الثمانية الأوجه  $= ٤ \sqrt{٣} \text{ م}^3$

وسطحه  $= ١٢ \sqrt{٣} \text{ م}^2$

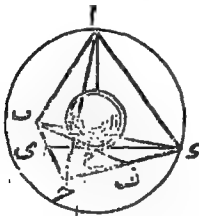
٨٤ - نصف قطرى الكرتين المرسومين داخلا وخارجا  
قد اعتبرنا كثير السطوح المتظم كأنه مرسوم على الكرة وأن مجمه يمكن  
تعيينه بدلالة نصف القطر

ومن تمائل شكله يتضح أن رؤوس كثير السطوح المتظم موجودة على  
سطح كرة أخرى مركزها هو نفس مركز الكرة الداخلة

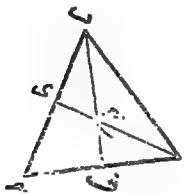
فليكن  $\text{م}$  نصف قطر الكرة المارة بالرؤوس و  $\text{م}$  نصف قطر الكرة  
التي تمس الأوجه فيكون

$$\frac{\text{م}}{١} = \text{جنا ه} = \text{ظا م} \frac{\text{ط}}{\frac{\text{ط}}{٢}} = \frac{\text{ط}}{٢}$$

٨٥ - إذا كان كثيرا سطوح متعاكسان مرسومين على كرة واحدة  
فانهما يكونان بينهما مرسومين داخل كرة واحدة وذلك لأن نسبة  $\text{م}$  الى  
 $\text{م}$  لا تتغير اذا أبدلنا كل من  $٦$  و  $٥$  بالآخر  
في المعادلة المينة بالبند السابق



٨٦ - مساحة أى شكل كثير السطوح  
متظم بدلالة نصف القطر  $\text{م}$  للكرة المرسومة  
عليه نحصل بأن نكتب  $\text{م} = \text{م} \text{جنا ه}$   
واذن فهي تساوى  $١ \text{ م}^2 \text{جنا ه} \frac{\text{ط}}{٢}$



ويحصل الحجم بضرب هذه الدالة في المقدار  $\frac{1}{3}$  من جناه

٨٧ - ويمكن تحصيل سطح وحجم الشكل ذي الأربعة الأوجه المنتظم المرسوم على كرة بدلالة نصف قطر الدائرة الداخلة بغير مساعدة حساب المثلثات الكروية

وذلك لأن الحجم يساوى  $\frac{1}{3}$  القاعدة  $\times$  الارتفاع ويساوى أيضا  $\frac{1}{6}$  القاعدة  $\times$  نصف قطر الكرة وذلك لأنه لأنه هرم واحد ممكن تكوينه من أربعة أهرام رؤوسها في مركز الكرة وقواعدها هي الأربعة الأوجه المتساوية للشكل ذي الأربعة الأوجه

أى أن  $\frac{1}{3}$  الارتفاع = س

واذن فإذا أمكن إيجاد مقدار القاعدة بدلالة ارتفاع ذي الأربعة الأوجه فانه يمكن إيجاد السطح والحجم بدلالة مقدار س

فإذا رمزنا للارتفاع أ ح <sup>(١)</sup> بالرمز هـ وفرضنا أن ١ مقدار ضلع ذي الأربعة الأوجه المنتظم فانه يكون

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{س} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

واذن يكون

$$\frac{2}{3} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{أو}$$

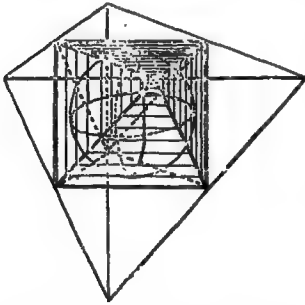
(١) أظن الشكل في بندى ٨٦ ٨٧ فالثلث المتساوى الأصلاخ في الأسفل هو مستوى قاعدة ذي الأربعة أوجه ومقاس الشكل الأسفل هو مقاس الشكل الأعلى وكل قطعة منه موضوعة رأسيا تحت النقطة المناظرة لها من الشكل العلوى



ومساحة القاعدة  $= \frac{21}{4} \sqrt{3} = 21 \sqrt{3}$

واذن يكون سطح الشكل ذى الأربعة أسطح  $21 \sqrt{3} \times 2$   
والحجم يساوى  $21 \sqrt{3} \times 8$

٨٨ - الارتباطات بين ذى الأربعة الأوجه وذى الثمانية الأوجه  
إذا قطع من زوايا ذى الأربعة الأوجه المنتظم أربعة أجسام صغيرة كل منها



ذو أربعة أوجه بمستويات مارة  
بمتصفات الأضلاع فكل واحد  
من هذه الرعايات الأوجه الصغيرة  
يكون ثمن الحجم الأصلي لأن ضلع  
كل منها نصف الضلع الأصلي  
وأحجام الأشكال المتماثلة مناسبة  
لمكعبات أضلاعها المتناظرة

واذن يكون حجم مابقى من ١  
الشكل الذى هو ذو ثمانية أوجه

منتظم نصف حجم ذى الأربعة الأوجه المنتظم ويمكن أن يرى أيضا بالسهولة  
من الشكل أن سطح ذى الثمانية الأوجه المنتظم هو نصف ذى الأربعة  
الأوجه لأن جميع الثمانية الأوجه هى مثلثات متساوية الأضلاع ومساح كل منها  
يساوى ربع مساحة أحد أوجه ذى الأربعة الأوجه المنتظم وهذا يثبت أن  
كلا من ذى الثمانية الأوجه وذى الأربعة الأوجه لها دائرة واحدة مرسومة  
داخلهما (أنظر بند ٨٣) وهذا أيضا واضح من أن النقط الأربع التى تتقابل  
فيها الدائرة الداخلة بذى الأربعة الأوجه المنتظم هى على الأوجه التى لم تقطع  
بحيث أن الكرة تمس أيضا ذى الثمانية الأوجه فى هذه النقط الأربع بعينها كما  
تمس أيضا فى أربعة أخرى

## تمرينات (١٢)

(١) المطلوب اثبات أن أسطح كثيرات الأوجه المنتظمة المرسومة على كرة نصف قطرها  $n$  هي كما يأتي

$$\text{سطح ذى الأربعة الأوجه المنتظم} = 4n^2 = 3\sqrt{2} = 41,57n^2$$

$$\text{المكعب} = 6n^2$$

$$\text{سطح ذى الثمانية الأوجه المنتظم} = 12n^2 = 3\sqrt{3} = 20,78n^2$$

$$\text{« الاثنى عشر وجهها »} = 14,70n^2$$

$$\text{« العشرين »} = 15,16n^2$$

$$\text{« الكرة نفسها »} = 12,57n^2$$

(٢) المطلوب اثبات أن أسطح كثيرات الأوجه المنتظمة المرسومة داخل كرة نصف قطرها  $n$  هي كما يأتي

$$\text{سطح ذى الاثنى عشر وجهها} = 10,51n^2$$

$$\text{« العشرين وجهها »} = 9,57n^2$$

$$\text{« المكعب العشرين وجهها »} = 8,00n^2$$

$$\text{« الثمانية الأوجه المنتظم »} = 4n^2 = 3\sqrt{2} = 6,93n^2$$

$$\text{« الأربعة »} = 4,62n^2$$

(٣) المطلوب اثبات أن حجم ذى الثمانية الأوجه المنتظم المرسوم في كرة نصف قطرها  $n$  هو  $\frac{4}{3}n^3$  وأن النسبة بين حجم الكرة وحجم ذى الثمانية الأوجه المرسوم فيها = ط

(٤) المطلوب اثبات أنه اذا كان تقط تماس كثير الأوجه المنتظم مع الكرة المرسومة داخله هي رؤوس كثير أوجه منتظم مرسوم داخل الكرة فان كثيرى الأوجه المذكورين يكونان متعاكسين أى أنه اذا كان أحدهما مكعبا فالآخر مثنى واذا كان أحدهما ذا اثنى عشر وجها فالثانى ذو عشرين وجها واذا كان أحدهما ذا أربعة أوجه فالثانى مثله

(٥) المطلوب اثبات أن سطح ذى الأربعة الأوجه المنتظم المرسوم فى كرة يساوى  $\frac{1}{4}$  سطح ذى الأربعة الأوجه المنتظم المرسوم على الكرة وإن النسبة بين المجمين كنسبة ١ الى ٢٧

(٦) المطلوب إيجاد حجمى ذى الاثنى عشر وجها المنتظم وذى العشرين وجها المنتظم المرسومين على كرة نصف قطرها بى

(٧) المطلوب إيجاد حجم ذى اثنى عشر وجها منتظم وذى عشرين وجها منتظم مرسومين فى كرة نصف قطرها بى

(٨) المطلوب إيجاد حجم مكعب مرسوم فى كرة نصف قطرها بى

(٩) المطلوب بيان أسطح وأحجام الأجسام الخمسة المنتظمة بدلالة أطوال أضلاعها

## الفصل الخامس

### أجسام الأجسام

٨٩ — لأجل تعيين حجم جسم محدود بوجهين متوازيين يحتاج الى تحقيق مقدار القطاع العرضى المتوسط للجسم الموازى لهذين الوجهين أى القطاع العرضى لأسطوانة مساوية للجسم فى الارتفاع ومجدها مساو لحجم الجسم المفروض وعليه يكون الحجم هو حاصل ضرب الارتفاع فى هذا القطاع العرضى

٩٠ — والطريقة التى تعطى القطاع المتوسط الحقيقى فى حالة جميع الأجسام البسيطة والتى هى أفيد طريقة كقانون تقريبي فى الأحوال المركبة هى اضافة مساحتي الوجهين المتوازيين المتطرفين وأربعة أمثال مساحة القطاع الموازى لهما الواقع فى منتصف المسافة بينهما وقسمة الناتج على ٦ الذى هو عدد الأوجه التى ضمت الى بعضها بهذه الكيفية أى ان ( بالضبط أو بالتقريب )

القطاع المتوسط —  $\frac{1}{6}$  (مجموع القطاعين المتطرفين + ٤ أمثال القطاع

الواقع فى الوسط)

وليس من الممكن أن نبالغ فى أهمية هذا القانون وهو معروف باسم القانون المنشورى أو قانون سمبسون

ولأجل استعمال هذا القانون يجب أن يقاس القطاعان المتطرفان والقطاع الواقع فى الوسط أو أن توجد معالم بها يمكن حسابها

٩١ — وينبغى أن يلاحظ أن القطاع المتوسط لا يكون مساويا فى المساحة للقطاع الواقع فى وسط الطول الا فى حالة ما يكون القطاع الواقع فى الوسط (م) هو المتوسط العددى للقطاعين المتطرفين (١ ٦ ب)

وذلك لأن القطاع المتوسط  $= \frac{1}{4} (1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20)$  فإذا كان مساويا للقطاع الواقع في الوسط (م) توجد المعادلة الآتية

$$م = \frac{1}{4} (1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20)$$

$$م = \frac{1}{4} (1 + 3)$$

وهذه الحالة البسيطة لا تحصل في جسم من الأجسام العادية الا في الأسطوانة والمنشور التي فيها جميع القطاعات العرضية متساوية الا أن هناك خاصية مشابهة لذلك في حالة بعض أوجه هذه الأقسام كما سبى فيما يأتى وهناك جسم واحد هو الجسم المكافئ المتولد من الدوران ففي هذه الحالة تطبق القاعدة في تعيين الحجم وهناك أيضا بعض أحوال مخصوصة من أجسام ناقصة مجوّفة فيها القطاع الواقع في وسط الطول هو أيضا القطاع المتوسط إذ أن كلا منهما بالطبع هو المتوسط الهندى للقطاعين المتطرفين كما سبق اثباته آنفا

### (القطاعات الواقعة في الوسط)

المخروط الناقص القائم الدائرى

٩٢ - إذا كان  $ر$  و  $ر'$  هما نصفا

قطرى قاعدتى مخروط ناقص فنصف

قطر القطاع الواقع في الوسط هو  $\frac{1}{4}$

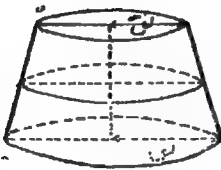
$(ر + ر')$  وأذن تكون مساحة القطاع

المذكور بدلالة  $ر$  و  $ر'$  اللذين هما

نصف القطرين  $= \frac{1}{4} ط (ر + ر')$

٩٣ - إذا كانت المساحتان  $م$  و  $م'$  للقاعدتين معلومتين فقادير أنصاف

الأقطار  $ر$  و  $ر'$  يمكن أن تحسب من القانونين



ط ب<sup>٢</sup> = ١ ٦ ط ب<sup>٢</sup> = ب واذاً يمكن معرفة مساحة القطاع الواقع في الوسط أو يمكننا أن نعين هذه المساحة بدلالة ١ ٦ ب وبذلك نحسب مقدارها بدون اجراء الحساب الرقمي الذي يعين ب ٦ ب<sup>٢</sup> في أول الأمر هكذا

$$\overline{\frac{1}{2}}\gamma = \overline{\frac{1}{2}}\gamma = \overline{\frac{1}{2}}\gamma$$

واذاً يكون

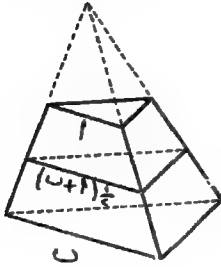
$$= \left( \overline{\frac{1}{2}}\gamma + \overline{\frac{1}{2}}\gamma \right) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (\overline{\frac{1}{2}}\gamma + \overline{\frac{1}{2}}\gamma)$$

$$\frac{(\overline{\frac{1}{2}}\gamma + \overline{\frac{1}{2}}\gamma + 1) \frac{1}{4}}{2} = \frac{(\overline{\frac{1}{2}}\gamma + \overline{\frac{1}{2}}\gamma) \frac{1}{4}}{2}$$

وهذه هي مساحة القطاع الواقع في الوسط بدلالة مساحة القاعدتين

٩٤ - وينبغي أن يلاحظ أنه متى كان ١ ٦ ب معلومين فالعمل الحسابي لتعيين القطاع الواقع في الوسط يمكن اختصاره كثيراً بتعيين مقداره بدلالة ١ ٦ ب بالعلمية الجبرية السابق شرحها بدلاً من البدء بتعيين المقادير الرقمية لكل من ب ٦ ب<sup>٢</sup> ثم يستعمل القانون الأوضح وهو  $\frac{1}{4} \text{ط} (\overline{\frac{1}{2}}\gamma + \overline{\frac{1}{2}}\gamma)$  وبذلك تتجنب عمليتي قسمة على ط ثم الضرب بعد ذلك في هذا العدد وتجنب أيضاً عمليتي جذر تربيعي وعملية تربيع إذ أن اللازم هو إيجاد جذر تربيعي واحد وهو  $\overline{\frac{1}{2}}\gamma$  ويجب على الطالب في هذه الطريقة استعمال عمليات جبرية لتقليل الأعمال الحسابية متى كان ذلك ممكناً وترك اللازم منها في نهاية لآخر العملية

### ٩٥ - الهرم الناقص



ان طريقة ايجاد مساحة القطاع الواقع في الوسط لهرم مستنبطة من أن قطاعات الهرم الموازية لقاعدته جميعها أشكال متشابهة وعليه فسرى أن القانون الذي يعين مساحة القطاع الواقع في الوسط بدلالة مساحتي القاعدتين هو في الهرم كما في المخروط وأنه يمكن تطبيقه على أى مخروط ناقص

فليكن  $ا$   $ب$  هما مساحتا القاعدتين و  $ا$   $ب$  هما ضلعان متناظران من القاعدتين فعليه يكون  $ا = ك ا^2 = ب = ك ب^2$  (ك رمز لقيمة ثابتة فضلع القطاع الواقع في الوسط الموازي الى  $ا$   $ب$  هو  $\frac{ا + ب}{2}$  واذن تكون مساحة هذا القطاع  $= ك \left( \frac{ا + ب}{2} \right)^2$   
 $\frac{1}{4} (ك ا^2 + 2 ك ا ب + ك ب^2) = \frac{1}{4} (ك ا^2 + 2 ك ا ب + ك ب^2)$

### ٩٦ - وينبغي أن يلاحظ :

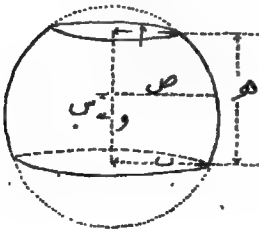
- (١) أن مساحة القطاع الواقع في وسط المخروط الناقص أو الهرم الناقص تتعلق فقط بقاعدتي ذلك الجسم الناقص ولا علاقة لها بالارتفاع الكلية
- (٢) وأن مقداري  $ا$   $ب$  متماثلان كما يجب أن تكون الحال بالضرورة حيث لا يؤثر على ذلك تسمية أى القاعدتين  $ا$  والثانية  $ب$
- (٣) وأنه اذا كان  $ا = ب$  أى في حالة ماؤول المخروط والهرم الى اسطوانة أو منشور فمقدار القطاع الواقع في الوسط يؤول الى  $ا$  أيضا وهناك ملحوظات مشابهة سبق بالنسبة للقانون  $\frac{1}{4} ط (ب + ب)$

### تمريعات (١٣)

- (١) مخروط ناقص قائم نصف قطر قاعدتيه ٣ أمتار ٦ ٦ أمتار على التناظر والمطلوب معرفة نصف قطر القطاع الواقع في الوسط ومساحته
- (٢) مساحة قاعدتي مخروط ناقص هما ٣٠ ٦ ١٢٠ ٦ مترا مربعا على التناظر والمطلوب معرفة مساحة القطاع الواقع في الوسط
- (٣) المطلوب إيجاد مساحة القطاع الواقع في الوسط لهرم قاعدته معلومة
- (٤) المطلوب إيجاد مقدار القطاع الواقع في الوسط لمخروط ناقص بدلالة المحيطين  $٦\text{ م}$  و  $٦\text{ م}$  للقاعدتين الدائريتين للمخروط الناقص المذكور
- (٥) إذا كانت قاعدتا هرم ناقص مثلثين وكانت قاعدة كل مثلث تساوي ٢ سم ارتفاعه وكان الارتفاعان هما  $٦\text{ م}$  و  $٦\text{ م}$  فما مقدار القطاع العرضي الواقع في وسط الهرم الناقص المذكور

### ٩٧ — القطعة القروية الناقصة

ان المسائل التي تستلزم بحثا هندسيا فيما يتعلق بالقطعة الكروية الناقصة المعلوم ارتفاعها  $هـ$  ونصفا قطري قاعدتيها  $٢$  و  $٢$  هي



- (١) مساحة القطاع الواقع في الوسط
- (٢) نصف قطر الكرة
- (٣) المسافة بين مركز الكرة والقطاع الواقع في وسط القطعة الكروية الناقصة ولا ضرورة في تعيين حجم القطعة الكروية الناقصة إلى إيجاد الكيتين الأخرين ولكن



يظهر أنه يحسن أن نبين كيفية تعيين تلك الكيات وذلك لنجمع جميع المسائل الهندسية الضرورية فيما يتعلق بالقطعة الكروية الناقصة في موضع واحد وفضلا عن ذلك فإن المعادلات التي تستعمل لتعيين إحدى تلك الكيات توصلنا الى تعيينها جميعا

فاذ فرض أن  $س$  هو بعد مركز الكرة عن القطاع الواقع في الوسط وأن  $ص$  هو نصف قطر القطاع الواقع في الوسط وأن  $هـ$  هو نصف قطر الكرة فبناء على ما هو معلوم في الهندسة تنتج المعادلات الثلاث الآتية

$$س^2 = ١^2 + \left(\frac{1}{4} هـ + س\right)^2 \quad (١) \dots \dots \dots$$

$$س^2 = ٢^2 + \left(\frac{1}{4} هـ - س\right)^2 \quad (٢) \dots \dots \dots$$

$$س^2 = س^2 + ص^2 \quad (٣) \dots \dots \dots$$

فاذا طرحت معادلة (١) من معادلة (٢) يحصل  $س = ر$  هو

$$س = \frac{١ - ٢}{٢ هـ} \quad (٤) \dots \dots \dots$$

واذا أضيفت المعادلتان المذكورتان الى بعضهما نجد

$$س^2 = \frac{١ + ٢}{٢} + س^2 + \frac{٢ هـ}{٤} \quad (٥) \dots \dots \dots$$

واذن يحصل من معادلة (٣)

$$ص^2 = \frac{١ + ٢}{٢} + \frac{٢ هـ}{٤} \quad (٦) \dots \dots \dots$$

وهذه المعادلات (٤)، (٥)، (٦) هي الارتباطات الأصلية التي ستحتاج اليها ويمكن الحصول عليها بأى ترتيب يراد من المقادير الثلاثة للكمية  $س$  كما ينبغى للطالب أن يتحقق من ذلك وليس من الضروري تعيين مقدار  $س$  كما ولا حاجة للاهتمام بمنظ القوانين الخاصة بمقادير  $س$  كما أنه من السهل استنباطها مباشرة بالرسم وكذلك يمكن إيجاد القانون الخاص بمقدار  $ص$

الا أنه نظرا لتكرر الاحتياج اليه أكثر من القانونين الآخرين فن الصواب أن يحفظ بصفة خاصة وإذا ضربنا مقدار ص<sup>٢</sup> في النسبة التقريبية ط فانه يتحصل منه مساحة القطاع الواقع في الوسط هكذا

$$\text{القطاع الواقع في الوسط} = ط \left( \frac{٢}{٤} + \frac{٢ + ٢}{٢} \right)$$

٩٨ - وينبني اختبار هذا القانون بتطبيقه على أحوال خاصة

(١) فلنأخذ الكرة التامة أى لنفرض ١ = ب = ٠ ٦ هـ = ٢ بى  
فالقانون يؤول الى ط بى<sup>٢</sup> الذى هو مساحة دائرة عظيمة من الكرة كما يجب أن يكون الحال

(٢) ولنأخذ شقة رقيقة جدا بأن نفرض ب = ١ ٦ هـ = ٠ فالقانون يؤول الى ط بى<sup>٢</sup>

(٣) ولنفرض نصف كرة فيها ١ = بى ٦ هـ = ٠ ٦ هـ = بى  
فالقانون يؤول الى  $\frac{٢}{٤}$  ط بى<sup>٢</sup> وهو قانون يتضح بقليل من التأمل أنه صحيح بالنسبة للقطاع الواقع في وسط نصف الكرة

٩٩ - وينبني أن يلاحظ أن مساحة القطاع الواقع في وسط قطعة كروية ناقصة يتعلق بارتفاع القطعة بعكس مساحة القطاع الواقع في وسط مخروط أو هرم ناقص فانه لا يتعلق بالارتفاع

١٠٠ - وينبني ملاحظة الارتباطين الآتيين وهما مستتجانان من الشكل مباشرة

$$\begin{aligned} & \sqrt{٢ - بى^٢} + \sqrt{٢ - بى^٢} = هـ \\ & \sqrt{٢ - بى^٢} + \sqrt{٢ - بى^٢} = ٢٦ هـ \end{aligned}$$

فالمقداران  $\sqrt{2 - 2\alpha}$  و  $\sqrt{2 - 2\beta}$  هما بعدا قاعدتي القطعة الناقصة عن مركز الكرة وتعلق الإشارة (+ أو -) في كل حالة يكون مركز الكرة داخل القطعة الكروية الناقصة أو خارجها

وإذا ضربنا أحد المقدارين السابقين في الآخر يكون

$$2 - 2\alpha = 2 - 2\beta$$

وذلك مطابق لمقدار (٤) السابق استخراجه

### ١٠١ - القطعة الكروية

إذا كانت القطعة الكروية ذات قاعدة واحدة (وهي القطعة الكروية الناقصة في حالة ما يكون نصف قطر إحدى قاعدتيها يساوى صفرا) فمقدار نصف قطر الكرة يعين بقانون أبسط كثيرا مما

في الحالة المعتادة ويمكن الحصول عليه

بأن نضع  $\alpha = 0$  في القانون السابق

بيانه لمقدار  $\sqrt{2}$  ثم تأخذ الجذر التربيعي

لطرفي المعادلة أو الأحسن أن يستعمل

برهان مستقل كما يأتي

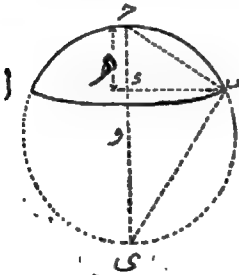
فالمثلثان القائم الزاوية  $\alpha$  و  $\beta$

كما في (أنظر الشكل) متشابهان

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 \times \alpha$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2$$



ويجب على الطالب أن يثبت أى مساحة القطاع الواقع في وسط القطعة  

$$= ط \left( ١ \frac{١}{٢} + ٢ \frac{١}{٢} \right) \text{ وأن البعد } س \text{ للقطاع المتوسط عن مركز الكرة}$$

$$= ٢ \div ٢ = ٢$$

١٠٢ - وهناك بعض ارتباطات بسيطة تستحق أن يلتفت إليها بين  
 القطعة أ ح ب والقطعة المكملة أ ي ب

فإذا كان هـ ٦ هـ هما ارتفاعا القطعتين و سـ ٦ سـ هما بعدا القطاعين  
 الواقعين في وسطهما عن مركز الكرة فمن السهل أن يرى أن

$$\text{هـ} = ٢ = سـ ٦ سـ ٢ = هـ$$

$$\text{لأن } ١ = و = ح = سـ + \frac{١}{٢} \text{ هـ}$$

$$\text{وإذاً يكون } ١ = ح = ٢ = سـ + هـ$$

$$\text{ومنها } ١ = سـ ٢ = سـ$$

$$\text{أى أن } ١ = هـ = سـ ٢ = سـ$$

وبمثل ذلك إذا اعتبرت القطع بترتيب عكسى يكون

$$١ = و = سـ ٢ = سـ + \frac{١}{٢} \text{ هـ}$$

$$\text{وإذاً يكون } ١ = ح = ٢ = سـ + هـ$$

$$\text{ومنها } ١ = سـ ٢ = سـ$$

$$\text{أى أن } ١ = هـ = سـ ٢ = سـ$$

وهناك طريقة أخرى للوصول الى القانون

$$٢ = و = ٢ = سـ + \frac{١}{٢} \text{ هـ}$$

وهي باعتبار الارتفاعين هـ ٦ هـ للقطعة ومكملتها التي توفى الارتباط

$$٢ = ٦ هـ + ٢ هـ = ٦ هـ$$

واذن يكون هـ ٦ هـ هما جذرا المعادلة ذات الدرجة الثانية الآتية

$$٢ هـ - ٢ هـ + ٦ هـ = ٠$$

### تمرينات (١٤)

(١) قطعة كروية ارتفاعها أربعة أمتار ونصف قطر قاعدتها ستة أمتار قسمت الى أربعة أقسام ارتفاع كل منها متر بثلاثة مستويات موازية للقاعدة والمطلوب تعيين مساح القطاعات الحادثة من هذه المستويات القاطعة

(٢) قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ٣ أمتار ونصف قطر قاعدتها ٤ أمتار و ٨ أمتار على التناظر والمطلوب إيجاد نصف قطر القطاع الواقع في الوسط ونصف قطر الكرة

(٣) قطر احدى قاعدتي قطعة كروية ٥٠ مترا ومحيط قطاعها الذي في وسط الارتفاع ١٥٤ مترا والمطلوب تعيين ارتفاع القطعة

(٤) المطلوب بيان أن القطاع الواقع في وسط ارتفاع قطعة كروية ناقصة يزيد عن المتوسط العددي لمساح قاعدتيها الدائريتين بمقدار مساحة القطاع الواقع في وسط كرة قطرها يساوى ارتفاع القطعة الكروية الناقصة

(٥) اذا قطعت كرة محددة لتجويف كروي بمستويين متوازيين بحيث يخترقان التجويف فالمطلوب اثبات أن مساحة القطاع الواقع في وسط هذه القطعة الكروية الناقصة هي المتوسط العددي لمساحتي القاعدتين وبيان أن نظرية مسألة (٤) السابقة تنتج من حالة خصوصية لهذه النظرية

(٦) اذا اشتملت كرة على تجويف كروي وقطعت بمستويات موازية للخط الواصل بين مركز الكرة ومركز التجويف فالمطلوب البرهنة على أن جميع هذه القطاعات التي تقطع التجويف متساوية في المساحة

(٧) اذا اشتملت كرة على تجويف كروي متحد معها في المركز فالمطلوب اثبات أن جميع القطاعات التي تقطع التجويف متساوية في المساحة

(٨) المطلوب إيجاد نصف قطر كرة يمكن أن يقطع منها قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ٥ سنتيمترات ونصف قطر قاعدتها ٣ سنتيمترات ٦ ٤ سنتيمترات على التناظر

(٩) كرة نصف قطرها ١٠ أمتار أخذت منها قطعة كروية ارتفاعها ٥ أمتار ونصف قطر إحدى قاعدتها ٦ أمتار والمطلوب إيجاد نصف القطر الثاني باستعمال القانون (هـ)  $\sqrt{2 - 2} \pm \sqrt{2 - 2}$

(١٠) نصفًا قطري قاعدتي قطعة كروية ناقصة هما ٣٠ سنتيمترا و ٤٠ سنتيمترا على التناظر ونصف قطر الكرة المقطوعة منها تلك القطعة ٥٠ سنتيمترا فما ارتفاع القطعة الكروية الناقصة

(١١) المطلوب إيجاد مساحة دائرة عظيمة في الكرة التي قطع منها قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ١١ سنتيمترا ونصفًا قطري قاعدتها ٣ سنتيمترا و ٨ سنتيمترات على التناظر وبيان بعد هاتين القاعدتين عن مركز الكرة

(١٢) المطلوب بيان أن  $2 = 2 + 2$  اذا كان هـ  $1 \pm 1$  ثم إيجاد بعد مركز الكرة عن قاعدتي القطعة في هذه الحالة

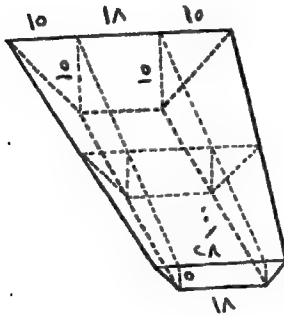
(١٣) المطلوب اثبات أن القطعة الكروية الناقصة تكون كبرى أو صغرى على حسب ما يكون هـ أكبر أو أصغر من  $2 - 1$



(٤) جزء من أخذود سكة حديد طول قاعدته الأفقية ١٠٠ متر وعرضها ١٨ متراً على شكل منشور ناقص ميل جوانبه  $٤٥^\circ$  على الأفق وله وجهان رأسيان على شكل منحرف وارتفاع الوجهين المذكورين ١٥ متراً وهما أمتار على التناظر والمطلوب إيجاد مساحتي الوجهين الرأسيين المذكورين والقطاع الواقع في وسط طولهما

(٥) المطلوب بيان أن هذا المنشور الناقص يمكن قسمته إلى جزء متوسط قطاعاته العرضية المستطيلات عرضها ١٨ متراً وهرمين ناقصين قطاعاتهما العرضية مثلثات قائمة الزاوية متساوية الساقين ثم إيجاد مساحتي القطاعات التي في وسط كل من هذه الأقسام الثلاثة

(٦) المطلوب إيجاد مقدار القطاع الواقع في وسط أخذود منشوري ناقص مثل المتقدم حينما يكون عرض القاعدة ٢ وارتفاعا الوجهين ١ و ٦ هـ ٢

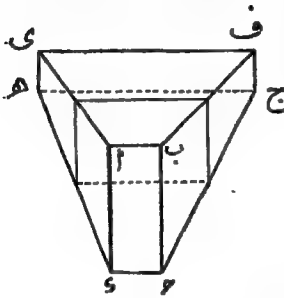


(٧) المطلوب بيان مقدار القطاع الواقع في وسط أخذود حينما لا يكون ميل جوانبه على الأفق  $٤٥^\circ$  بل حينما يكون ظل تمام تلك الزاوية يساوي سـ

(٨) المطلوب إيجاد مساحتي القطاعين المتطرفين للشكل المنشوري الناقص المبين في الرسم والقطاع الواقع في وسطه بعلومية الأبعاد الآتية للطرفين المستطيلين  $١ = ١٠$  أمتار  $٦ = ٣٠$  متراً  $٦ = ٥٠$  متراً  $٦ = ١٠$  أمتار



(٩) اذا كان الوجهان  $اى هـ$  و  $ك ب$  ف ج ح للنشور الناقص السابق ذكره ممدودين الى أن يتقابلا في خط بطول قدره  $و$  وامتد الوجهان



$ا ب$  ف  $ى$  و  $ك ب$  ف ج ح هـ الى أن يتقابلا في خط طوله  $ك$  بالمطلوب إيجاد مساحة القطاع الواقع في وسط الجسم المتكون بهذه الكيفية (١٠) المطلوب إيجاد مساحة القطاع الواقع في وسط الجسم المذكور في المسئلة السابقة (الذى هو جسم ذو أربعة أوجه ثلاثية مستوية)

بفرض أن  $و = ٣٥$  مترا  $ك = ٧٠$

### القطاعات المتوسطة والأجسام

١٠٤ — لا يجد الطالب صعوبة الآن في تعيين القطاع المتوسط لأى جسم من الأجسام السابق شرحها بتطبيق القانون المنشورى الذى به القطاع المتوسط =  $\frac{1}{2}$  (مجموع القطاعين المتطرفين + أربعة أمثال

القطاع الواقع في الوسط)

والحجم يعين بعد ذلك بضرب القطاع المتوسط في ارتفاع الجسم أى في المسافة العمودية بين القطاعين المتطرفين وفي حالة تكون الجسم من أجزاء مختلفة الشكل كما اذا كان مكونا من مخروط فوق قطعة كروية أو عرمة الدريس التى في المسئلة (٣) من تمرينات (١٥) السابقة فكل جزء يحسب وحده وتضم الأجسام الجزئية على بعضها

وننصح للطلاب أن يدرس الجدول الآتى باعثناء فيجد القانون الخاص بالقطاع المتوسط في كل حالة بتطبيق القانون الأساسى السابق ذكره



١٠٥ - وفي البنود الآتية سنثبت أن حاصل ضرب الارتفاع في القطاع المتوسط المتحصل بواسطة القانون المنشورى يعطى الحجم المضبوط فى حالة الأجسام البسيطة ويتعلق الاثبات بالأمر الآتية :

(١) ان قانون القطاع المتوسط يعطى حقيقة متوسطا صحيحا لشقة رقيقة مقطوعة بمستويين موازيين للقطاعين المتطرفين وذلك لأن القطاعين المتطرفين لشقة رقيقة متساويان تقريبا ومساويان للقطاع الواقع فى وسط تلك الشقة والقانون فى هذه الحالة يحل القطاع المتوسط مساويا للقطاع المتطرف كما هو اللازم أن يكون

(٢) وإذا لم يعط القانون الا مقدارا تقريبا لحجم شقة غليظة فيمكن الحصول على تقريب أعظم بقسمة الشقة السمكة الى شقق متعددة رقيقة وتطبيق القانون على كل واحدة منها ثم اضافة الأحجام الجزئية الى بعضها وعليه فاذا لم تختلف نتيجة هذه الطريقة عن نتيجة القانون السابق فان القانون المذكور يكون مضبوطا وليس تقريبا فقط وستطبق ذلك على المخروط الناقص والقطعة الكروية الناقصة والأجسام الأخرى

#### ١٠٦ - المخروط الناقص

ليكن ٦ ا ب نصفى قطرى قاعدتى المخروط وح نصف قطر القطاع الواقع فى وسط الارتفاع بحيث يكون  $٢ ح = ا + ب$  وليكن ه هو ارتفاع المخروط الناقص

فبمقتضى القانون يكون الحجم مساويا

$$ه \times \frac{١١ ط + ٤ ط ح + ٢ ط ب}{٦} = ه \times \frac{٢ ط + ١ ط ا + ١ ط ب + ٢ ط ح}{٣}$$

فاذا قسم المخروط الناقص الى قسمين ارتفاع كل منهما  $\frac{١}{٢} ه$  فان القانون نفسه يعطى الحجم هكذا :

$$\frac{١}{٢} ه \left( \frac{٢ ط + ١ ط ا + ١ ط ب + ٢ ط ح}{٣} + \frac{٢ ط + ١ ط ح + ١ ط ب + ٢ ط ا}{٣} \right)$$

$$= \frac{1}{4} هـ \left( \frac{ط^2 + ٢ ط ح + (ب + ١) ح^2 + ٢ ط ب}{٢} \right) = \frac{1}{4} هـ \left( \frac{ط^2 + ٢ ط ح + ٢ ط ب + ح^2}{٢} \right)$$

وهذا مثل ما سبق

وعلى ذلك اذا قسم كل جزء من هذه الأجزاء الى قسمين ثم كل جزء منها الى قسمين وهكذا فان مقدار الحجم الكلى المتحصل بضم الأجام الجزئية المتحصلة بمقتضى القانون لا يتغير

وبما أن الطريقة الأدق لا تعطى نتيجة مخالفة فيجب أن يكون القانون مضبوطا بالنسبة للقطع السميكة متى كان مضبوطا بالنسبة للقطع الرقيقة التى تبين أن الحال كذلك بالنسبة لها

وبمثل ذلك يمكن البرهان على أن القانون مضبوط بالنسبة للهرم الناقص ومن الواضح أن هذا القانون مضبوط بالنسبة للهرم التام والمخروط التام لأن الهرم التام والمخروط التام ليسا الاحالة خاصة من المخروط والهرم الناقصين وهو بالنسبة لكليهما كما يأتى :

$$\text{الحجم} = \frac{1}{3} \text{ القاعدة} \times \text{الارتفاع}^{(١)}$$

### ١٠٧ - القطعة الكروية الناقصة

اذا أخذنا بالمعالم السابقة يكون  $ط ح^2 = ط \frac{ب + ١}{٢} + \frac{ط هـ^2}{٤}$  ويكون القانون المنطبق على القطعة الكروية الناقصة بتامها الذى يعين الحجم هو

$$هـ \left( \frac{ط^2 + ٢ ط ح + (ب + ١) ح^2}{٢} + \frac{ط هـ^2}{٤} \right)$$

(١) ان القانون الذى يعطى حجم هرم ثلاثى تام يمكن الحصول عليه بمقتضى ما هو مقرر فى اقليدس حيث تبين أن المنشور يمكن قسمه الى ثلاثة اهرام متساوية ويمكن بيان القانون بالنسبة الى أى هرم آخر أو مخروط بملاحظة أنه مكون من جملة اهرام مثلثة .

وبتطبيق القانون على جزأى الكرة الناقصة اللذين ارتفاع كل منهما  $\frac{1}{4} هـ$  يكون الحجم مساويا الى :

$$\frac{1}{4} هـ \left( \frac{\text{ط} هـ^2}{24} + \frac{\text{ط} هـ + \frac{1}{2} \text{ط}}{2} + \frac{\text{ط} هـ^2}{24} + \frac{\text{ط} هـ + \frac{1}{2} \text{ط}}{2} \right) = \frac{1}{4} هـ \left( \frac{\text{ط} هـ^2}{12} + \text{ط} هـ + \frac{\text{ط} + \frac{1}{2} \text{ط}}{2} \right)$$

وهذا المقدار اذا أدخل فيه مقدار  $\frac{1}{2} هـ$  يؤول الى

$$\frac{1}{4} هـ \left\{ \frac{\text{ط} هـ^2}{2} + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ط} \right\} = \frac{1}{4} هـ \left( \frac{\text{ط} هـ^2}{2} + \frac{\text{ط} + \frac{1}{2} \text{ط}}{2} \right)$$

كما تقدم

واذن فبمراعاة الأسباب السابقة كما في حالة المخروط الناقص فان القانون يعطى الحجم بالضبط

ويكون القانون المعين للحجم الكرة التامة.

$$\text{الحجم} = \frac{4}{3} \text{ط} \text{م}^3 = \frac{1}{4} \text{ط} (\text{القطر})^3$$

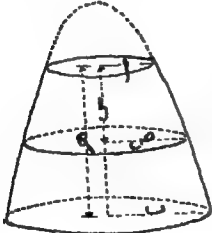
### ١٠٨ - المجسم المكافئ

ان الطالب الذى درس الهندسة التحليلية يمكنه أن يثبت بسهولة أن مساحة

أى قطاع عرضى (ط ص د) متباعد بالبعد مـ عن الطرف الذى نصف قطره ا هى  $\frac{\text{ط} - \frac{1}{2} \text{ط}}{\text{م} + \frac{1}{2} \text{ط}}$  بحيث

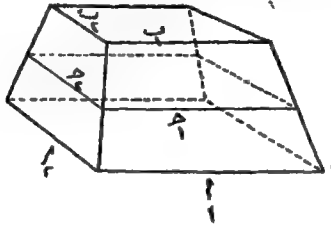
يكون القطاع الواقع فى وسط الارتفاع الذى يتحصل بوضع مـ =  $\frac{1}{4} هـ$  هو  $\frac{\text{ط} (\text{ط} + \frac{1}{2} \text{ط})}{4}$  واذن فيمكنه أن يثبت أن

الحجم هو  $\frac{\text{ط} هـ}{4} (\text{ط} + \frac{1}{2} \text{ط})$  بنفس الكيفية السابق شرحها



## ١٠٩ - المنشور الناقص

ان ضبط القانون المنشوري في تعيين حجم منشور ناقص يمكن اثباته  
بالطريقة عينها



لنفرض أن ارتفاع الجسم المنشوري الناقص هو  $h$  وأن القطاع العرضي مستطيل

وليكن  $a$   $b$  هما طولاه ضلعي القاعدة السفلى  $b$   $a$  هما ضلعا القاعدة العليا  $a$   $b$  هما ضلعا القطاع الواقع في الوسط بحيث يكون

$$a + b = 2c \quad b + a = 2c$$

فالقانون حينئذ يعطى

$$\text{الحجم} = \frac{a^2 + 4ac + b^2}{6}$$

$$= \frac{a^2 + (a+b)(a+b) + b^2}{6}$$

$$= \frac{a^2 + a^2 + 2ab + b^2 + b^2}{6}$$

فإذا قسمنا هذا الجسم الى جسمين منشوريين ارتفاع كل منهما  $\frac{1}{2}h$

فيحصل المقدار الآتي للحجم

$$\frac{1}{2}h \left( \frac{a^2 + 4ac + b^2}{6} + \frac{a^2 + 4ac + b^2}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \text{ هـ } \frac{2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 4 + 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 4}{6}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ هـ } \frac{2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 4 + 2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 4}{6}$$

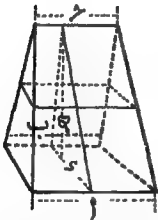
$$= \text{ هـ } \frac{2 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 1 \times 4}{6} \text{ كما سبق}$$

واذن فبمراعاة الأسباب السابقة كما في حالة المخروط الناقص فان هذا القانون يعطى الحجم بالضغط

وبمثل ذلك يمكن اثبات أن هذا القانون مضبوط بالنسبة للأجسام المنشورية ذات القطاعات العرضية المخالفة لذلك

### ١١٠ - قانون حجم الخابور

ان حجم الخابور يمكن أن يتحصل من القانون المنشوري ولكن يمكن الحصول على قانون أبسط بالطريقة الآتية



ليكن  $a$  ب  $c$  هي أطوال الحروف المتوازية من الخابور وليكن  $d$  هو البعد العمودى بين  $a$  ب وليكن  $e$  هو البعد العمودى للحرف  $c$  عن المستوى الشامل لكل من  $a$  ب الذى نطلق عليه اسم قاعدة الخابور فتكون مساحة القاعدة هي  $\frac{1}{4} (a + b)$

ولأجل ايجاد مساحة القطاع الواقع فى الوسط الموازى للقاعدة يلزم أن يلاحظ أنها شبه منحرف عرضه  $\frac{1}{4} (a + b)$  وأن ضلعيه المتوازيين هما  $\frac{1}{4} (a + b)$   $\frac{1}{4} (b + c)$  على التناظر واذن تكون

$$\text{مساحة القطاع الواقع فى الوسط} = \frac{1}{4} \times \left( \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} \right) \times \frac{h}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{12} \times \frac{h}{2} =$$

واذن فن القانون المنشورى يكون

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1+b) + \frac{1}{4}(1+b+c) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1+b+c)$$

واذن يكون

$$\frac{1}{4}(1+b+c) = \frac{1}{4} \times \frac{1+b+c}{4} =$$

وحيث ان القطاع العرضى للخابور بالتعمد على أحرفه الثلاثة ١ ٦ ٦ ٦ هو مثلث مساحته  $\frac{1}{4} \times ٦ \times ٦$  والمتوسط الحسابى للأحرف ١ ٦ ٦ هو  $\frac{1}{4}(1+b+c)$  فيكون

حجم الخابور يساوى المتوسط الحسابى للأحرف الثلاثة المتوازية مضروباً في مساحة القطاع العرضى العمودى على هذه الأحرف

وفى الحالة الخصوصية التى يتساوى فيها ١ ٦ ٦ ٦ يكون الخابور منشوراً طوله ١ وقطاعه العرضى  $\frac{1}{4} \times ٦ \times ٦$

وعلى ذلك يكون حجم الخابور مساوياً لحجم المنشور المتحد معه فى مساحة القطاع العرضى والذى طوله هو المتوسط العددى للخراف الثلاثة المتوازية للخابور

تحقيق آخر لقانون القطعة الكروية الناقصة والمخروط الناقص

١١١ - ينبغى أن يلاحظ أن الكيات التى بصورة ١ ٦ ٦ ٦ التى يشتمل عليها القطاع الواقع فى وسط الارتفاع والقطاع المتوسط للخروط الناقص والقطعة الكروية الناقصة هى مضاعفات للكيات ١ ٦ ٦ ٦ التى هى جميعها مقادير مسطحات أى ذات بعدين وأن ١ ٦ ٦ ٦ التى هى أيضاً ذات بعدين لا تدخل فى تلك المقادير ويمكن أن يتذكر الطالب أى الحدود هى التى لا توجد وذلك بملاحظة أن المساحة المعينة بالمقادير ١ ٦ ٦ ٦



ك ب هـ يجب أن توجد في مستو مواز للحدود هـ للمخروط الناقص أو القطعة الكروية الناقصة بحيث أنه لا يمتثل أن توجد تلك الحواصل من أول الأمر في قانون مبين لقطاع مستويه عمودى على هذا المحور وفي الواقع ونفس الأمر أن هذا الخطأ في الاتجاهات يجعل وجود هذه الحدود مستحيلا واذن فالحدود ذات الدرجة الثانية التي يمكن أن توجد في مقادير القطاعات الواقعة في وسط الارتفاع والقطاعات المتوسطة هي أربعة فقط وهي  $١٦٦٦٦٦٦٦$   $١٦٦٦٦٦٦٦$   $١٦٦٦٦٦٦٦$  وبسبب التماثل يكون من الواضح أن معاملات المقدارين  $١٦٦٦٦٦٦٦$   $١٦٦٦٦٦٦٦$  يلزم أن تكون متساوية لأنه لا فرق بين جعل أحد نصف القطرين هو  $١$  والثاني هو  $١$  أو عكس ذلك وبناء على ذلك تدرج جميع القوانين في هذا القانون العام وهو

$$ل (١ + ٢) + ١٢ + ١٢ + ١٢ + ١٢$$

وبمراعاة الأحوال الخصوصية يمكن معرفة المعاملات ل  $١٦٦٦٦٦٦٦$   $١٦٦٦٦٦٦٦$  في المخروط الناقص والقطعة الكروية الناقصة بشرط أن تعرف القوانين الخاصة بالمخروط التام والكرة التامة

١١٢ - وعلى ذلك فلنفرض أننا نزيد تعيين مقادير ل  $١٦٦٦٦٦٦٦$   $١٦٦٦٦٦٦٦$  التي بمقتضاها تعين الكميات ل  $(١ + ٢) + ١٢ + ١٢ + ١٢$  هـ القطاع العرضي المتوسط للمخروط الناقص

(١) لنأخذ حالة المخروط التام بأن نضع  $ب = ٠$  وحجم المخروط  $\frac{1}{3}$  ط  $١٦٦٦٦٦٦٦$  هـ وعلى ذلك يكون قطاعه العرضي المتوسط  $\frac{1}{3}$  ط  $١٦٦٦٦٦٦٦$  ويؤول القانون الى ل  $١٦٦٦٦٦٦٦ + ١٢$  هـ ومن هنا يكون

$$٠ = ١٢ ط \frac{1}{3} ل = ٠$$

(٢) لنأخذ شقة رقيقة أو لنفرض أن المخروط قد آل الى اسطوانة ففى كلتا الحالتين  $ب = ١$  والقطاع المتوسط يلزم أن يكون ط  $١٦٦٦٦٦٦٦$

$$\begin{aligned} & \text{و يصير القانون} & (2 + 1) \sqrt{2} \\ & \text{واذن يكون} & 2 + 1 \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ & & 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \\ & & 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \end{aligned}$$

واذن يكون القانون المبين للقطاع العرضي المتوسط لمخروط ناقص هو  
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} (1 + 1 + 1)$

١١٣ — ثم انه لأجل إيجاد مقادير  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  التي فيها يكون المقدار العام بعينه مبينا للقطاع العرضي المتوسط لقطعة كروية ناقصة :

(١) نأخذ الكرة التامة التي قطاعها العرضي المتوسط هو  $\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2}$  كما نعلم وفيه  $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 5, 6 = 6$  واذن يؤول القانون  $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$

$$\begin{aligned} & \text{ويكون} & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \\ & \text{أى أن} & 1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

واذن يكون الحد المشتمل على  $\frac{1}{6}$  مساويا الى  $\frac{1}{6}$  ط  $\frac{1}{6}$  الذى هو القطاع المتوسط للكرة التي قطرها  $1$  كما هو ظاهر

(٢) نأخذ نصف الكرة التي قطاعها العرضي المتوسط هو أيضا  $\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{2}$  ط  $\frac{1}{6}$  فهنا  $1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 5, 6 = 6$  واذن يؤول القانون الى

$$\begin{aligned} & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \\ & \text{واذن يكون} & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6 \\ & \text{ومنه} & 1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(٣) نأخذ شقة رقيقة أى نضع  $b = 6a$  هـ = . فالقطاع هو ط  $\frac{1}{2}$  وهذا على حسب القانون يساوى  $\frac{1}{4}$  ط  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + 2a$  واذاً يلزم أن يكون  $m = 0$  . واذاً ينتج أخيراً أن القانون المضبوط هو

$$\frac{1}{4} ط (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} ط هـ$$

١١٤ - وبطريقة مشابهة لذلك يمكن استنتاج القوانين الخاصة بالقطاعات الواقعة فى وسط الارتفاع وقد تركنا ذلك للطالب ليقوم به كتمرين له

### تمرينات (١٦)

(١) أثبت أنه فى جميع الأجسام التى ينطبق عليها قانون سمبسون تكون مساحة القطاع المتوسط محصورة بين مساحة القطاع الواقع فى الوسط والمتوسط الحسابى لمساحة القاعدتين

(٢) أثبت أيضاً أن الفرق بين القطاع المتوسط والمتوسط الممدى للقطاعين المتطرفين هو ضعف الفرق بين القطاع الواقع فى وسط الارتفاع والقطاع المتوسط ووضح ما ذكر فى (١) الكرة و (٢) المخروط

(٣) أثبت أنه اذا كان القطاعان المتطرفان كل منهما مساو للصفر فإن القطاع المتوسط يساوى  $\frac{2}{3}$  القطاع الواقع فى وسط الارتفاع

(٤) المطلوب إيجاد حجم كرة نصف قطرها ٥ أمتار

(٥) المطلوب اقامة البرهان الهندسى على أن المنشور الثلاثى يمكن أن يقسم الى ثلاثة أهرام متساوية

(٦) المطلوب اثبات أن حجم المخروط ثلث حجم الاسطوانة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع

(٧) أثبت أنه اذا كان مخروط ونصف كرة واسطوانة متحدة في القاعدة والارتفاع فالنسبة بين أحجامها تكون كنسبة ١ : ٢ : ٣

(٨) أثبت أنه اذا اتحدت قاعدة نصف كرة



مع اسطوانة ارتفاعها كنصف قطر الكرة واتحدت قاعدة مخروط ارتفاعه كالارتفاع السابق مع القاءة الثانية للاسطوانة بحيث تشمل الاسطوانة

على نصف الكرة والمخروط فان قطاعي نصف الكرة والمخروط الحادتين من أى مستو مواز للقاعدة يساوى مجموعهما القطاع العرضى للاسطوانة

(٩) استخرج من نظرية السؤال السابق قانون حجم الكرة بناء على قانون حجم المخروط

(١٠) احسب حجم قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ٥ أمتار وأنصاف أقطار قاعدتها هما ٣ أمتار و ٥ أمتار على التناظر

(١١) أثبت أن القطاع المتوسط لقطعة كروية ناقصة يزيد على المتوسط الحسابى للقاعدتين بمساحة القطاع المتوسط لكرة قطرها ارتفاع هذه القطعة

(١٢) أثبت أن حجم القطعة الكروية الناقصة يزيد على المتوسط الحسابى لحجم أسطوانتين قواعدهما كقواعد القطعة الكروية وارتفاعهما يساوى

ارتفاعها بقدر حجم الكرة التى قطرها يساوى هذا الارتفاع

(١٣) المطلوب معرفة حجم قطعة كروية ناقصة مجزأة ارتفاعها ٣ سنتيمترات والسطحان الداخلى والخارج لهما جزآن من كرتين متحدتين فى المركز وقطرهما ١٢ سنتيمترا و ١٠ سنتيمترات على التناظر

(١٤) المطلوب معرفة حجم كرة مجوفة نصف قطرها الداخل والخارج هما ٨ أمتار و ١٠ أمتار على التناظر ومعرفة حجم كل من القطعتين الكرويتين والقطعة الكروية الناقصة المجوفة التي تنقسم اليها الكرة بمستويين متوازيين مماسين بالضبط للسطح الداخل والمطلوب معرفة كل حجم من هذه الأحجام على حدته ثم امتحان النتيجة بالأمر المعلوم من أن مجموع الأحجام يساوى الحجم الكلي للكرة

(١٥) المطلوب بيان أنه اذا أحيل مكعب مصنوع من مادة عجينية الى كرتين متساويتين فإن قطر الكرة الواحدة يقرب من ضلع المكعب

(١٦) المطلوب اثبات أنه اذا قطع من مكعب كرة قطرها كضلعه فإن الحجم المخدوف يقرب من نصف حجم المكعب

(١٧) المطلوب معرفة مجموع حجم كرتين متساويتين قطر كل منهما مترواحد

(١٨) المطلوب معرفة قطر كرة حجمها نصف متر مكعب

(١٩) المطلوب امتحان قانون القطاع الواقع في وسط ارتفاع مخروط ناقص بتطبيقه (١) على مخروط تام (٢) على اسطوانة أو شقة رقيقة من المخروط

(٢٠) المطلوب امتحان قانون القطاع الواقع في وسط الارتفاع لقطعة كروية ناقصة بتطبيقه على (١) كرة تامة (٢) شقة رقيقة منها

(٢١) بمعرفة أن حجم المخروط يساوى ثلث قاعدته مضروباً في ارتفاعه المطلوب ايجاد قانون حجم المخروط الناقص باعتباره فرق مخروطين وطبق ذلك على مخروط ناقص ارتفاعه ٣٠ متراً وقطرها قاعدتيه ٤ أمتار و ٦ أمتار على التناظر

(٢٢) المطلوب اثبات أن حجم المخروط الناقص يزيد على حجم اسطوانة متحدة معه في الارتفاع وقطاعها العرضي يساوى القطاع الواقع في وسط ارتفاع المخروط الناقص بمقدار يساوى حجم مخروط متحد معهما في الارتفاع ونصف قطر قاعدته نصف الفرق بين نصف قطري قاعدتي المخروط الناقص

(٢٣) المطلوب اثبات أن حجم المخروط يزيد بقدر الثلث عن حجم الاسطوانة التي قطاعها العرضي يساوى القطاع العرضي الواقع في وسط ارتفاع المخروط

(٢٤) أثبت أنه إذا حسب حجم مخروط ناقص باعتبار أن القطاع المتوسط

مساو للقطاع الواقع في وسط ارتفاعه فالخطأ يساوى  $\frac{1}{3} \left( \frac{H}{2} - \frac{H}{4} \right)^2$  من الحجم المحسوب بحيث أنه إذا رمز للخطأ النسبي بالرمز  $\epsilon$  وللحجم المحسوب بالرمز

ح فالجسم الصحيح يساوى

$$(1 + \epsilon) \text{ ح}$$

(٢٥) ما هو الخطأ النسبي في المسألة السابقة (١) إذا كان قطر إحدى القاعدتين ثلاثة أمثال القاعدة الأخرى (٢) إذا كان قطر إحدى القاعدتين ضعف قطر الأخرى

(٢٦) إذا كان نصف قطري قاعدتي مخروط ناقص هو ٢٠ متراً و ٣٠ متراً بالتناظر والحجم المحسوب بفرض أن القطاع المتوسط هو المار بوسط الارتفاع يساوى ٣٠,٠٠٠ متراً مكعباً فما مقدار الخطأ النسبي وما هو الحجم الحقيقي

(٢٧) ما هو ارتفاع المخروط الناقص المذكور في المسألة السابقة

(٢٨) بين أن بعد رأس مخروط عن القطاع الواقع في وسط ارتفاع

مخروط ناقص من هذا المخروط يساوى  $\frac{1}{3} \left( \frac{H}{2} - \frac{H}{4} \right)^2$  هو  $\frac{1}{3} \left( \frac{H}{2} - \frac{H}{4} \right)^2$

(٢٩) اذا كان  $s$  هي نصف زاوية رأس مخروط فالمطلوب اثبات أن حجم المخروط الناقص  $= \frac{1}{3} (s^2 - s^2)$  جتا  $s$  وفي هذا المقادير ١٦ هي أنصاف أقطار قاعدتي المخروط الناقص

(٣٠) أثبت أنه اذا قسم مخروط ناقص الى قسمين متساويين الحجم بمستوى مواز لقاعدتيه وكان ١ ٦ ب أنصاف أقطار قاعدتيه ٦ ح نصف قطر المستوى القاطع فانه يكون  $\frac{1}{3} (s^2 + s^2)$

(٣١) المطلوب إيجاد حجم غوامة مركبة من مخروط مركب على نصف كرة وارتفاع المخروط مساو لنصف قطر الكرة وكل منهما ٦٠ متر

(٣٢) غوامة مركبة من قطعة كروية وفوقها مخروط وارتفاع المخروط ٣٦٠ أمتار ونصف قطر القاعدة المشتركة بين القطعة الكروية والمخروط ١٥٠ متر والارتفاع الكلي للغوامة هو ٦ أمتار والمطلوب معرفة مقدار الحجم

(٣٣) نصف كرة قسمت الى أربعة أقسام متساوية في السمك بثلاثة مستويات مرسومة بالتوازي لقاعدة نصف الكرة والمطلوب معرفة أحجام الأجزاء اذا كان نصف قطر الكرة ١٢ مترا

(٣٤) المطلوب بيان مقدار حجم قطعة كروية ناقصة معلوم ارتفاعها ومحيط كل من قاعدتيها

(٣٥) المطلوب بيان حجم قطعة كروية ناقصة بدلالة القطاع الواقع في وسط الارتفاع وارتفاعها

(٣٦) المطلوب اثبات أن جميع القطع الكروية الناقصة المتحدة في الارتفاع وفي القطاع الواقع في وسط الارتفاع متساوية في الحجم مهما كان نصف قطر الكرة التي قطعت منها

(٣٧) المطلوب اثبات أن حجم القطعة الكروية بدلالة ارتفاعها (هـ) ونصف القطر (ن) للكرة المأخوذة منها القطعة يساوى ط هـ<sup>٢</sup> (ن -  $\frac{1}{4}$  هـ)

(٣٨) بين أن حجم القطاع الكروي بدلالة نصف قطر الكرة وارتفاع القطعة الكروية التي تكون قاعدة القطاع المذكور يساوى  $\frac{2}{3}$  ط ن<sup>٢</sup> هـ

(٣٩) المطلوب معرفة حجم الجزء المخروطى من القطاع الكروي

(٤٠) المطلوب معرفة حجم القطاع الكروي والجزء المخروطى من القطاع بدلالة الارتفاع ونصف قطر قاعدة القطعة الكروية التي تكون قاعدة القطاع

(٤١) المطلوب اثبات أن حجم القطاع الكروي يساوى حجم مخروط ارتفاعه يساوى نصف قطر الكرة وقاعدته تساوى ط (١ + هـ<sup>٢</sup>)

(٤٢) مخروط صلب ارتفاعه يساوى نصف قطر قاعدته ثبتت قاعدته في قاع اناء اسطوانى مساو له في نصف قطر القاعدة وفي الارتفاع وكان لدينا اناء شكله نصف كرة نصف قطره مثل نصف قطر الاسطوانة والمخروط مشتمل على ماء ارتفاعه فيه يساوى هـ فاذا صب الماء في الاناء الأسطوانى المشتمل على المخروط فما هو الارتفاع الذى يصل اليه الماء

(٤٣) المطلوب ايجاد حجم الماء الذى يمكن أن يحويه خزان عمقه ١٠ أمتار ومقاسه من أعلى ٤٠ مترا  $\times$  ٣٠ مترا وأضلاعه مائلة بحيث يكون مقاسه من أسفل ٢٠ مترا طولا  $\times$  ١٠ أمتار عرضا

(٤٤) المطلوب ايجاد عدد الأمتار المكعبة من الدريس في عرمة إبعادها كما في المسألة (٣) من تمرينات (١٥) اذا كان ارتفاع العرمة ١٨ مترا وارتفاع البروز عن الأرض ١٠ أمتار



(٤٥) المطلوب معرفة حجم كبة من الحجر مرصوبة على شكل منشوري ناقص موضوع بعضه على جسر مجاور لطريق وارتفاع الرصة ٢ متر وقاعدته السفلى والعليا كلاهما مستطيل طوله ١٠ × ٤ أمتار و ٨ × ٨ أمتار على التناظر

(٤٦) المطلوب إيجاد حجم خابور أطوال أضلاعه المتوازية هي على التناظر ١٢ ١١ ٦ ١٠ ٦ ١٠ سنتيمترات وقطاعه العرضي العمودي على هذه الأضلاع مثلث متساوي الأضلاع محيطه ٤٥ سنتيمترا

(٤٧) قاعدة خابور شكلها مستطيل طوله ٥ سنتيمترات وعرضه ٢ سنتيمتر والحرف الثالث طوله ٣ سنتيمترات فما هو ارتفاع الخابور اذا كان حجمه ٥٢ سنتيمترا مكعبا

(٤٨) اذا قسم الخابور المذكور في السؤال السابق الى قسمين وكان المستوى القاطع موازيا للقاعدة وفي وسط المسافة بينها وبين الحرف الثالث فالمطلوب إيجاد حجم كل من الجزأين



(٤٩) هرم قاعدته مستطيلة ١٠ أمتار × ٢٠ مترا قطع منه خابور ارتفاعه نصف ارتفاع الهرم بمستو مار بأحد الضلعين الطويلين للقاعدة والمطلوب تعيين النسبة بين حجم الخابور وحجم الهرم

(٥٠) خزان عمقه ٢٠ مترا وأجنابه مستوية مائلة بحيث تكون قاعدته العليا مربعا مساحته ١٦٠٠ متر مربع وقاعدته السفلى مستطيلا ١٠ أمتار × ٢٠ مترا فما حجم الخزان

(٥١) اذا ملئ الخزان الى نصفه فما عدد الأمتار المكعبة من الماء فيه

(٥٢) المطلوب معرفة مساحة القطاع العرضي للخران السابق على ارتفاع قدره هـ متراً من القاع بفرض أن يكون بالصورة ١ + ب هـ + ح هـ وبفرض مقادير هـ على التوالي  $20.6 \ 10.6 \ 0 =$

(٥٣) المطلوب إيجاد القطاع العرضي المتوسط للماء إذا ملئ الخزان إلى عمق قدره هـ متراً ومقدار الحجم المشتمل عليه متى كان عمق الماء فيه (١) ٦ أمتار (٢) ١٤ متراً

(٥٤) المطلوب حساب الحجم المنشوري لأخدود السكة الحديد السابق في المسألة (٤) من تمرينات (١٥)

(٥٥) إذا كانت قاعدتا هرم ناقص مثلثين قاعدة كل مثلث منها أكبر من ارتفاعه بقدر ٢ سم وكان ارتفاع المثلثين هما ٦ هـ ٦ هـ فالمطلوب إيجاد القطاع العرضي للهرم الناقص

(٥٦) إذا كان البعدين قاعدتي الهرم الناقص في السؤال السابق ١٠٠ متر وارتفاع تلك القواعد هو ١٥ متراً و ٥ أمتار على التوالي فالمطلوب حساب الحجم (١) عند ما يكون سم = ١ ٦ (٢) عند ما يكون سم =  $1 \frac{1}{4}$

(٥٧) جزء من أخدود في طريق سكة حديدية طوله ل وجوانبه رأسية وقطاعاه المتطرفان مستطيلان عرضهما ٢ ١ وارتفاعهما ٦ هـ ٦ هـ على التناظر والمطلوب إيجاد القطاع العرضي المتوسط لهذه الأخدود وحجمه

(٥٨) جزء على شكل منشور ناقص من أخدود سكة حديد قاعدته مستطيلة أفقية طوله ل وعرضه ٢ ١ وميل جوانبه ٥٤° على الأفق وارتفاع شبيه المنحرف المكوّنين للقاعدتين ٦ هـ ٦ هـ والمطلوب حساب القطاع العرضي المتوسط للطريق وحجمه

(٥٩) المطلوب معرفة مقدار القطاع المتوسط والحجم إذا كانت زاوية ميل الجوانب للأخدود المذكور على الأفق = ظلًا<sup>١</sup> - س ( ملحوظة - اقسم الأخدود الى جزء متوسط محدود بوجهين رأسيين وهرمين ناقصين )

### ١١٥ - ملحوظة خاصة بالقطعة الكروية الناقصة

#### التجويد الكروي

ان القطاع الواقع في وسط ارتفاع قطعة كروية ناقصة هو

$$\frac{1}{4} (ط أ + ط ب^2) + \frac{1}{4} ط هـ \text{ والقطاع المتوسط هو } \frac{1}{4} (ط أ + ط ب^2) + \frac{1}{4} ط هـ$$

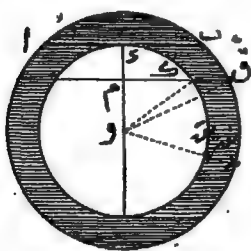
وينبغي أن يلاحظ أن الجزء  $\frac{1}{4} (ط أ + ط ب^2)$  واحد في كل من القانونين وأنه مساو للمتوسط الحسابي للقطاعين المتطرفين وذلك موافق لما سبق اثباته في أوائل هذا الفصل وهو أنه إذا كان القطاع الواقع في وسط الارتفاع هو المتوسط الحسابي للقطاعين المتطرفين فإنه يكون هو القطاع المتوسط أى أنه حتى في حالة ما يكون المتوسط الحسابي للقطاعين المتطرفين معينا لجزء فقط من القانون المطلوب فإن النظرية تكون صحيحة بالنسبة لهذا الجزء

أما من جهة الأجزاء الأخرى من القانونين أى  $\frac{1}{4} ط هـ$  و  $\frac{1}{4} ط هـ$  فانهما على التناظر مساويان للقطاع الواقع في وسط الارتفاع والقطاع المتوسط لكرة قطرها يساوى هـ كما هو واضح بالضرورة وذلك لأنه إذا انعدم كل من أ و ب فيكون هـ هو مقدار قطر الكرة المعلومة وهذا الأمر يستحق أن يلتفت اليه لأنه يعين جدا على تذكر القانون أنظر المسألة (٤) من تمرينات (١٤) والمسألتين (١١) و (١٢) من تمرينات (١٦)

وينتج مما تقدم أن التجويف الكروي اذا قطع في القطعة الكروية الناقصة بقطر مساو الى ارتفاع القطعة الناقصة فان القطاع الواقع في وسط الارتفاع والقطاع المتوسط للتجويف الكروي الناقص المكون بهذه الكيفية يكونان متساويين ويكون كل منهما مساويا للمتوسط الحسابي للقطاعين المتطرفين وحجم التجويف الكروي الناقص يساوى  $\frac{1}{3}$  ط هـ (أ + ب)

### ١١٦ - الكرة المجوفة

ان الحالة الخصوصية التي فيها يكون مركز التجويف الكروي متحدا مع مركز الكرة مهمة جدا بحيث يجب ملاحظتها وذلك لأن جميع القطاعات التي



تقطع التجويف متساوية في المساحة لأن مساحة القطاع الناشئ عن المستوى المار بالنقط م ك ق عموديا على و م هو ط م أ - ط م ك وذلك لأن القطاع هو حلقة دائرية مجوفة أنصاف أقطارها الخارجة والداخلية على التناظر هي م ق و م ك

فاذا كان نصف قطر الكرة الخارجة هو بى ونصف قطر الكرة الداخلة هو بى فانه يكون

$$م أ = بى - و م$$

$$م ك = بى - و م$$

6

$$م أ - م ك = بى - بى = ٠$$

واذن يكون

وطيه تكون مساحة القطاع المار بالمستوى م ك ق = ط (ن<sup>٢</sup> - ن<sup>١</sup>)  
 فإذا فرضنا الحالة الخاصة التي يكون فيها القطاع ا و ب مماسا للتجويف  
 بالضبط فمساحة القطاع = ط (د ب) = ط (ن<sup>٢</sup> - ن<sup>١</sup>) واذن يكون  
 حجم أى قطعة كروية ناقصة مجوّفة مساويا لحجم اسطوانة متحدة فى الارتفاع  
 مع القطعة الكروية الناقصة ومساحة قاعدتها تساوى مساحة القطاع ا و ب

أو يمكن اعتبارها مساوية لحجم اسطوانة مجوّفة ارتفاعها مساو لارتفاع  
 القطعة الكروية الناقصة وأنصاف أقطارها الخارجة والداخله هى نفس أنصاف

### أقطار الكرة

١١٧ - وينبى أن يلاحظ أنه اذا كانت القطعة الكروية الناقصة  
 المجوّفة مقسومة بمستويات على أبعاد متساوية متوازية الى قطع كروية ناقصة  
 متساوية الارتفاع فأحجام جميع هذه القطع الكروية الناقصة تكون متساوية  
 ومساوية لحجم قطع من الاسطوانة المكافئة المجوّفة أو المصمتة المقطوعة  
 بمستويات متباعدة عن بعضها بأبعاد متساوية ومساوية للأبعاد المتقدمة

ويلزم أن يلاحظ أيضا أن سمك القطعة الكروية الناقصة المجوّفة مقاسا  
 بالتمام على السطحين الداخل والخارج هو ن - ن<sup>١</sup> وهو بنفسه مساو  
 لسمك الاسطوانة المجوّفة المكافئة المذكورة

### ١١٨ - القطاع الكروى

ان حجم القطاع الكروى يتحصل بضم حجم المخروط الى حجم القطعة الكروية  
 وهما الجان اللذان يتكون منهما القطاع الكروى

فحجم القطعة الكروية = ط ه (  $\frac{1}{3} أ + \frac{1}{3} ه$  ) و ه رمز لارتفاع  
 القطعة و حرف ا نصف قطر القاعدة

وحجم المخروط هو  $\frac{1}{3}$  ط  $\text{أ}$  (ن — هـ) وفيه ن رمز لنصف قطر الكرة المرتبط مع مقداري ٦ هـ بالمعادلة

$$\text{أ} + \text{هـ}^2 = ٢ \text{ ن هـ} \dots \dots \dots (١)$$

واذن حجم القطاع =  $\frac{1}{3}$  ط  $\text{أ}$  ن +  $\frac{1}{3}$  ط هـ (أ + هـ<sup>٢</sup>)

$$= \frac{1}{3} \text{ ط أ ن} + \frac{1}{3} \text{ ط هـ}^2 \text{ ن}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ ط ن هـ}^2 \dots \dots \dots (٢)$$

وهذا قانون بسيط جدًا ومهم ويمكن أن يمتحن بأن يفرض فيه على التوالى هـ = ٦ هـ = ن ٦ هـ = ٢ ن

فاذا علم أ وهو نصف قطر القاعدة بدلا من هـ فان مقداره هـ يتحصل بحل المعادلة (١) وأخذ الجذر الأصغر للمعادلة أى هـ = ن — ٢ ن — ٢ هـ وهذا المقدار للارتفاع هـ واضح أيضا من علم الهندسة

### تمريعات (١٧)

(١) المطلوب البرهنة على أن القطاع المتوسط لكرة يساوى مساحة القطاع

الذى بعده عن المركز  $\frac{\text{ن}}{٣}$

(٢) المطلوب البرهنة على أن القطاع المتوسط لقطعة كروية ناقصة ارتفاعها هـ مشتملة على تجويف كروي قطره هـ يساوى المتوسط الحسابى لأى قطاعين عرضيين موازيين للقاعدتين ومتباعدين ببعدين متساويين عن القطاع الواقع فى وسط الارتفاع

(٣) المطلوب البرهنة على أن القطاع المتوسط لأي قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ه يساوى المتوسط الحسابى للقطاعين اللذين بعد كل منهما عن القطاع الواقع فى الوسط يساوى  $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$

(٤) المطلوب البرهنة على أنه اذا كانت القطعة الكروية الناقصة ذات قاعدتين متساويتين وكان و هو مقدار قطر القطاع الذى بعده عن القطاع المار بوسط الارتفاع يساوى  $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$  فحجم القطعة الكروية الناقصة يساوى  $\frac{1}{4} ط و^2 ه$

(٥) المطلوب اثبات أنه اذا كان ثقب اسطوانى مارا بمركز كرة فالباقي من الكرة يساوى كرة مصمطة قطرها يساوى طول الثقب  
(٦) ثقب اسطوانى قطره سنتيمتر واحد مر بمركز كرة قطرها ٦ سنتيمترات وثقلها ٣٠ كيلوجراما والمطلوب ايجاد حجم الجزء المحذوف بسبب الثقب وثقله وحجم الجزء الباقى وثقله

(٧) المطلوب ايجاد أحجام أربعة أجزاء قد انفصلت اليها كرة نصف قطرها من ثلاثة سطوح اسطوانية محورها متحد مع قطر معلوم من أقطار الكرة ونصف قطر قطاعاتها العرضية تساوى على التناظر  $\frac{1}{4} و$   $\frac{1}{6} و$   $\frac{2}{6} و$   
(٨) المطلوب ايجاد أحجام الثلاث قطاعات الآتية من كرة نصف قطرها

مترواحد بحيث يكون فى القطاع الأول  $٠,٢٥ = ١$

وفى القطاع الثانى  $٠,٢٥ = ١٢$

وفى القطاع الثالث  $٠,٢٥ = ه$

(٩) المطلوب ايجاد الأحجام المنفصلة للأجزاء المخروطية والقطع الكروية لكل من القطاعات السابق ذكرها

في جميع الأجسام التي اشتغلنا بها فيما تقدم الى الآن قد كان الارتفاع محدودا وكان الجسم محصورا بين مستويين متوازيين والمسألة كانت "تصر في إيجاد القطاع العرضي المتوسط أى القطاع العرضي لاسطوانة ارتفاعها كارتفاع الجسم المفروض وحجمها كحجمه

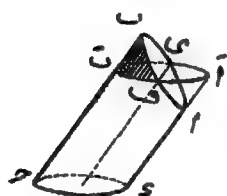
وهناك طائفة أخرى من الأجسام الصلبة وهي التي فيها يكون القطاع العرضي ثابتا والارتفاع متغيرا وأبسط هذه الأحوال هي حالة اسطوانة طرفها مستويان غير متوازيين وذلك كالاسطوانة ١ ب ح د في الشكل الأول من الأشكال الآتية

فلنفرض مستويا  $\alpha$  و  $\beta$  مرسوما بالتوازي للقاعدة  $CD$  مارا من نقطة  
تقابل النهاية الأخرى  $\alpha$  و  $\beta$  بمحور الاسطوانة

ولنفرض الآن أن الشقة من الاسطوانة  
المحصورة بين المستويين ١ ب ٦ أ ب  
قد أديرت حول الخط ى ف الذى هو خط  
تقاطع المستويين فيقع بالضرورة فى الموضع  
١ ى ف ٦ بحيث يكون حجم الاسطوانة  
المفروضة مساوى حجم اسطوانة قطاعها

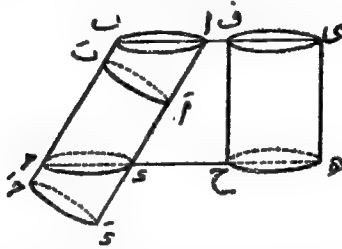
العرضي هو نفس القطاع العرضي للاسطوانة المفروضة وكذلك طول محورها وقاعداتها متوازتان

فحجم الاسطوانة المائلة ذات القاعدتين المتوازيتين يمكن أن يعين بطريقة من اثنتين إما بضرب مساحة إحدى القاعدتين في المسافة العمودية بين القاعدتين وإما بضرب طول المحور في مساحة القطاع العرضي العمودي عليه





واذن ففي الشكل الثاني يكون حجم الاسطوانة  $ا ب ح د$  مساويا لحجم الاسطوانة  $ا ب ح د$  التي هي اسطوانة قائمة مساوية لها في طول المحور



وفي القطاع العرضي وتلك الاسطوانة القائمة نحصل بمحذف الجزء  $ا ب ب ا$  وتعويضه بالجزء  $د ح ح د$  وهو أيضا يساوى حجم الاسطوانة  $ا ب ح د$  التي قاعدتها  $ح ه = ح د$  وارتفاعها يساوى ارتفاع الاسطوانة المفروضة وهناك أمثلة كثيرة على ما تقدم منها أنه اذا وضعت جملة من النقود على طاولة فجعلها وارتفاعها لا يتغيران سواء كانت رأسية أو مائلة فاذا كانت قاعدة الاسطوانة المائلة دائرة فان القطاعات العرضية العمودية على محورها لا تكون دائرة بل تكون قطعاً ناقصاً والنظريات المتعلقة بالجسم تكون صحيحة على الدوام مهما كانت أشكال القطاعات

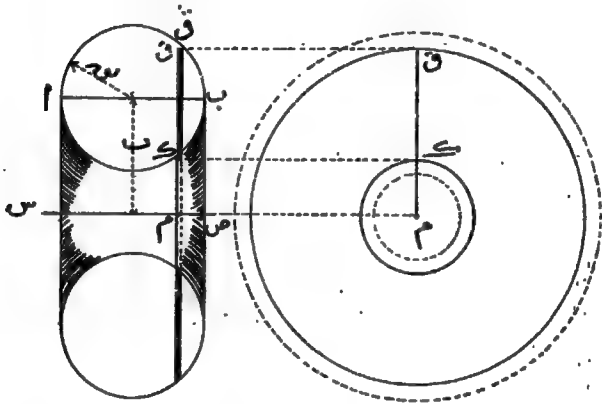
## ١٢٠ - الجسم الحلقى

وهناك جسم آخر من هذا النوع وهو ما يسمى بالجسم الحلقى وهو جسم يتكون من دوران دائرة حول محور خارج عنها الا أنه موجود في مستويها وهذا المحور يسمى محور الحلقة وحجم الجسم الذى من هذا القبيل هو حاصل ضرب مساحة الدائرة في المسار الذى يقطعه مركزها

برهانه

لتفرض أن الدائرة ١ و ٢ ب ك تدور حول المحور س ص

ولتفرض أن نصف قطر الدائرة يساوى سى وليكن بعد مركزها عن المحور س ص = ب فهذه المسافة تسمى نصف القطر المتوسط للحلقة



فاذا قطع الجسم بمستو عمودى على س ص بحيث يقطع المحور س ص فى م فسطح القطاع الحادث من هذا المستوى هو سطح حلقي مساحته

$$= ط (م ق - م ك^2)$$

$$= ط (م ق + م ك) (م ق - م ك)$$

$$= ٢ ط ب \times م ك$$

$$\text{لأن } م ق + م ك = ٢ ب \text{ و } م ق - م ك = م ك$$

وحينئذ فإذا رسم مستواً موازاً للمستوى الأول بحيث يمر من النقطتين  
 و ك ف حجم الجسم المحصور بينهما يساوى ٢ ط ب  $\times$  المساحة  
 و ك ك' و حجم جميع الجسم يكون بناءً على ذلك مساوياً إلى ٢ ط ب  
 $\times$  مساحة الدائرة

$$= ٢ ط ب \cdot ط ب'$$

$$= ٢ ط ب' ط ب$$

ومن هنا يستنتج أن حجم الحلقة يساوى مساحة الدائرة (ط ب') مضروباً

في طول المسار المقطوع بمركز الدائرة (٢ ط ب) وذلك الحجم يساوى حجم  
 أسطوانة قطاعها العرضى يساوى القطاع العرضى للجسم (ط ب') وارتفاعها  
 يساوى ٢ ط ب

ونسبة جزء الحلقة المقطوع بمستويين مارين بالخط سـ صـ ومائلين على  
 بعضهما بزاوية قدرها هـ إلى حجم الحلقة التامة هي كنسبة الزاوية هـ إلى ٢ ط  
 وبناءً على ذلك تكون مساوية إلى هـ ب  $\times$  ط ب' = ط هـ ط ب'

### تمرينات (١٨)

(١) المطلوب إيجاد حجم حلقة قطرها الخارج ٦ سنتيمترات وقطرها  
 الداخل ٤ سنتيمترات

(٢) حلقة مجوّفة يمكنها أن تسع بالضبط ٦ كرات متماسة نصف قطر  
 كل منها سنتيمتر واحد فما هو حجم الفراغ الواقع داخل الحلقة ومقدار الحجم  
 المشغول بالكرات

(٣) حلقة مجوّفة يمكن أن تسع كرات عددها ٥ ذات نصف قطر معين  
 مقداره ١ فما هو نصف القطر المتوسط للحلقة

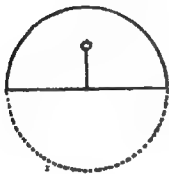
(٤) المطلوب اختبار حالة حلقة فيها ب = ط وتعيين حجم جسم كهذا

١٢١ — ان النظرية العامة التي يدخل فيها شرح حجم الحلقة هي  
اذا دار أى شكل مستو حول محور خارج عنه وموجود فى مستويه  
فحجم الجسم الناشئ عن الدوران يساوى مساحة الشكل مضروبة فى المسار  
الذى تقطعه نقطة معينة من الشكل تسمى مركز المساحة

فمثلا فى الجسم الحلقى يكون مركز الدائرة المتحركة هو مركز المساحة وفى  
هذه الحالة تكون مناسبة التسمية الاصطلاحية «مركز المساحة» واضحة  
وتأسيس النظرية العمومية يحتاج الى استعمال حساب التكامل ولكننا اذا  
فرضنا معرفتها فانه يمكن الحصول على نتائج مهمة وسنوضح ذلك فيما بعد

١٢٢ — المطلوب إيجاد مركز مساحة نصف دائرة بواسطة النظرية  
المذكورة آنفا

اذا دار نصف الدائرة حول قاعدته فان الجسم المرسوم هو كرة



فليكن  $h$  نصف قطر نصف الدائرة  $h$  سم  
بعد مركز مساحتها عن القاعدة فيكون  
مساحة نصف الدائرة  $= \frac{1}{2} \pi h^2$   
والمسافة المقطوعة بمركز المساحة  $= 2h$  سم  
وحجم الكرة  $= \frac{4}{3} \pi h^3$

وبناء على ذلك يكون بمقتضى النظرية

$$\frac{1}{2} \pi h^3 = 2h \times \frac{1}{2} \pi h^2$$

واذن يكون  $h = \frac{4}{3} \pi$  أو نحو  $\frac{4}{3} \pi$

١٢٣ - إيجاد أحجام أجزاء من حلقة متكوّنة من دوران النصفين الداخل والخارج من الدائرة المولدة

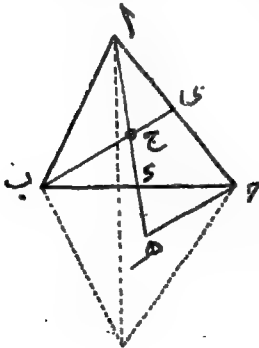
إذا أخذنا الجزء الخارج نجد أنه مساو لمساحة نصف الدائرة مضروباً في مسار مركز مساحتها  $= \frac{1}{4} ط ب^2 \times 2 ط \left( \frac{4}{3} ط + ب \right) = ط^2 ب + \frac{4}{3} ط ب^2$

وبمثل ذلك يكون الجزء الداخل

$$\frac{1}{4} ط ب^2 \times 2 ط \left( \frac{4}{3} ط - ب \right) = ط^2 ب - \frac{4}{3} ط ب^2$$

ومن هنا يكون جزء الحلقة المرسوم بنصف الدائرة الخارج أكبر من نصف حجم الحلقة بقدر حجم كرة نصف قطرها يساوي نصف قطر الجزء الصلب من الحلقة والجزء المرسوم بنصف الكرة الداخل أقل من نصف الحجم بالمقدار نفسه

١٢٤ المطلوب بيان أن مركز مساحة مثلث مكوّن بمقتضى النظرية السابقة هو نقطة تقابل الخطوط الواصلة من رؤوس المثلث الى منتصفات الأضلاع المقابلة



(٧)

من المعلوم أنه في المثلث اسد اذا كان ا و ك بى منتصفين من الثلاثة ومقاطعين في نقطة ح فان نقطة ح تكون موضوعة بحيث يكون ا و يساوى ثلاثة أمثال ح و ك بى = ٣ ح بى وبمثل ذلك بالنسبة للنصف المار بنقطة ح لأننا اذا رسمنا ح ه موازياً الى بى ومددناه حتى يقابل ا و في نقطة هـ

فان  $س هـ = س ح$  بمقتضى ما هو مقرر في الهندسة ٦ ا ح : ح هـ :: ا س :  
 س ح واذن يكون ا ح = ح هـ = ٢ ح س ومنه ا س = ٣ ح س

نظرية — اذا فرض الآن أن المثلث يدور حول ب ح وأن بعد نقطة  
 ا عن ب ح تساوى هـ فان الحجم المتولد يتركب من مخروطين قاعدتهما =  
 ط هـ ومجموع ارتفاعهما = ب ح واذن يكون الحجم =  $\frac{1}{3} ط هـ \times س ح$   
 ومساحة المثلث هي  $\frac{1}{2} هـ \times ب ح$

وعلى ذلك اذا كان س هـ هو بعد مركز المساحة عن ب ح فانه يكون

$$\frac{1}{3} هـ \times ب ح \times ٢ ط س = \frac{1}{3} ط هـ \times ب ح$$

$$س هـ = \frac{1}{2} هـ$$

وعلى ذلك تكون النقطة المطلوبة موجودة على خط مار بنقطة ح مواز  
 الى ب ح وبمثل ذلك اذا أدير المثلث حول ا ح فانه يمكننا اثبات أنها يلزم  
 أن تكون على خط مار بنقطة ح مواز الى ا ح واذن فيجب أن نتخذ النقطة  
 مع نقطة ح

### تمارينات (١٩)

(١) المطلوب إيجاد حجم حافة مكوّنة بدوران مثلث متساوى الأضلاع  
 حول محور في مستويه مع العلم بأن ضلع المثلث ٦ سنتيمترات وبعد مركز  
 مساحته عن محور الدوران ١٠ سنتيمترات

(٢) المطلوب إيجاد حجم جسم مكوّن بدوران مثلث حول قاعدته بفرض  
 أن طول القاعدة ٤ سنتيمترات وارتفاعه ٣ سنتيمترات

(٣) المطلوب إيجاد حجم جسم مكوّن بدوران مثلث حول قاعدته بفرض  
 أن طول القاعدة ب وارتفاع المثلث هـ

(٤) المطلوب إيجاد الحجم الذى يتولد من دوران شبه منحرف حول أحد ضلعيه المتوازيين بفرض أن طول ذلك الضلع ١ وطول الضلع الثانى ب والمسافة بينهما تساوى هـ

(٥) ثلاث دوائر متساوية نصف قطر كل منها متر ممتاسة أديرت حول المحاس المشتركة بين اثنين منها الذى لا يتقطع الثالثة والمطلوب حساب الحجم المكوّن من هذه المسامخ الدائرية

(٦) مربع مركب عليه نصف دائرة قطرها أحد أضلاع المربع ويدور حول ضلعه المقابل للضلع المذكور والمطلوب إيجاد الحجم الناشئ عن ذلك الدوران بفرض أن ضلع المربع ٩ سنتيمترات

## ١٢٥ - الأجسام المتشابهة

يقال أن الجسمين متشابهان متى كانت جميع الأبعاد الخطية المتناظرة في كليهما متناسبة فيقال مثلا أن قطعتين كرويتين ناقصتين متشابهتان متى كانت أنصاف أقطار القاعدتين والارتفاع في أحدهما تشتمل على أمتار بقدر ما تشتمل عليه مقاييس الأخرى من الديسيمترات وفي هذه الحالة تكون الأبعاد الخطية في إحدى القطعتين عشرة أمثال الوحدات الخطية في الأخرى

والقطاعات العرضية المتناظرة في الجسمين تكون نسبتها الى بعضها معلومة وهى مربع النسبة بين الأبعاد الخطية وهذا صحيح بالنسبة لأسطح الأجسام وبالنسبة لجميع المسامخ المتناظرة في الجسمين وذلك لأن المساحة هى حاصل ضرب بعدين والمسامخ المتناظرة فى كل من الجسمين هى حاصل ضرب زوجين متناظرين من الأبعاد

وحينئذ فإذا كان أحد الأبعاد في أحدهما يساوى م مرات من البعد المناظر له في الآخر فإن حاصل ضرب ضلعيين من أحد الجسمين يكون مساويا للحاصل المناظر له في الجسم الآخر مضروباً في م<sup>٢</sup> مرات

وفي المثال السابق ذكره تكون المسامخ في القطعة الكروية الناقصة الكبرى مشتملة بالضرورة على وحدات من الأمتار المربعة بقدر ما شتمل عليها الأخرى من الديسيمترات المربعة

وأحجام الأجسام تكون بنسبة مكعبات الأبعاد الخطية لأن الحجم ينتج من حاصل ضرب ثلاثة أبعاد وإذا كانت الأبعاد الثلاثة في أحد الجسمين أكبر من نظيرها في الجسم الثاني بقدر م مرات فحجم الأول يكون أكبر من حجم الثاني بقدر م<sup>٣</sup> مرات

وفي المثال السابق من الواضح أن حجم القطعة الكبرى يشتمل على أمتار مكعبة بقدر ما يشتمل عليه الحجم الثاني من الديسيمترات المكعبة

وفي الاشتغال بالمسائل الخاصة بالأشكال المتماثلة من الضروري أن نتذكر النظريات الأساسية جيداً وهي أنه إذا كانت الأبعاد الخطية على نسبة معلومة قدرها م : ١ فنظائرها في السطوح تكون بنسبة م<sup>٢</sup> : ١ وفي الأحجام بنسبة م<sup>٣</sup> : ١

فإذا علمنا في أى مثال أن المسامخ المتناظرة نسبتها إلى بعضها كنسبة ك : ١ فاللازم أنما هو أن نضع م<sup>٢</sup> = ك ثم نبحث عن مقدار م لأجل مقارنة الأطوال ك م<sup>٢</sup> لمقارنة الأحجام ثم إذا علمنا أن الأحجام هي بنسبة ك : ١ فيلزم أن نضع م<sup>٣</sup> = ك ثم نبحث عن م ك م<sup>٢</sup> أو أحدهما بمقتضى ذلك على حسب ما تحتاج إليه المسألة المبحوث عنها



## تمرينات (٢٠)

(١) نصف قطر قاعدتي قطعة كروية ناقصة ارتفاعها ٣ أمتار هما ٥ أمتار و ٨ أمتار على التناظر والأبعاد الطولية في قطعة أخرى مشابهة لهذه هي ضعف أبعاد القطعة السالفة الذكر والمطلوب إيجاد القطاع العرضي المتوسط لكليهما والجمع كذلك ثم مقارنة ما ذكر

(٢) الذاعدة الصغرى لقطعة كروية ناقصة مشابهة لما ذكر في المسألة السابقة تشتمل على ١٦ مترا مربعا والمطلوب إيجاد ارتفاع القطعة الكروية الناقصة وحجمها

(٣) القطاع العرضي المتوسط لقطعة كروية ناقصة مشابهة لما سبق ذكره يساوي ١٦ م<sup>٢</sup> مربعا والمطلوب إيجاد الارتفاع والجمع

(٤) حجم قطعة كروية ناقصة مشابهة لما سبق ١٠٠ متر مكعب فما ارتفاعها

(٥) نصف قطر قاعدتي مخروط ناقص ارتفاعه ٦ هـ هما ١ م و ٦ م على التناظر وارتفاع ونصف قطري قاعدتي مخروط آخر هي على التناظر ٢ هـ و ٦ م و ٢ م والمطلوب إيجاد ارتفاعي المخروطين الكاملين اللذين أخذ منهما هذان الجزآن وحجمهما والمقارنة بينهما ثم إيجاد حجم المخروطين الناقصين المذكورين والمقارنة بينهما

(٦) أي مخروط ناقص يكون معينا تعيننا تاما اذا علم نصف قطر قاعدتيه وارتفاعه فالمطلوب بيان أنه اذا كانت نسبة هذه الأبعاد في أي مخروط ناقص الى نظيرها في أي مخروط ناقص آخر هي م فتكون النسبة بين أي بعدين متناظرين في المخروطين هي م أيضا

(٧) المطلوب بيان أن جميع الكرات هي أشكال متشابهة

(٨) اذا كانت مساحة دائرة عظيمة في كرة (أى الحادثة بقطع الكرة بمستوى يمر بمركزها) هي ضعف دائرة عظيمة في كرة أخرى فالمطلوب مقارنة نصف قطر الكرتين وحجمهما

(٩) اذا كان ثقل كرة قطرها متر واحد يساوى ١٣٠٠ كيلو جراما فما قطر كرة من المادة نفسها وثقلها ١٦٢,٥ كيلو جراما

(١٠) القطاع العرضى المتوسط لكرة هو متر واحد مربع والمطلوب معرفة نصف قطرها وحجمها

(١١) المطلوب اثبات النظرية التى فى مسألة (٣٠) من تمرينات (١٦) بتكامل المخروط الذى قد أخذ منه المخروط الناقص المذكور فى تلك المسألة ومقارنة أحجام المخاريط المتشابهة فى قواعدهما على التناظر ذات أنصاف أقطار مقاديرها ١ ٦ ب ٦ ح

(١٢) المطلوب بيان أنه اذا قسم المخروط الناقص الى قسمين متشابهين فان ح<sup>٢</sup> = ١ ب

## الفصل السادس

### التقدير التقريبي للأجسام

١٢٦ — حينما يراد تعيين حجم جسم أوسع اثناء ليس شكاه أحد الأشكال السابقة ولا مركبا منها فإنه يمكن الحصول على المقدار التقريبي للجسم الى أى درجة أريدت من الدقة بالاستعانة بقانون سمسون بشرط أن يكون فى الامكان تحقيق مسامح أى عدد أريد من القطاعات العرضية المتباعدة بأبعاد متساوية عن بعضها

فمثلا اذا أريد تعيين حجم برميل ارتفاعه الداخل ه وأقطاره الداخلة هـ ب فى طرفيه ٦ د فى وسطه فإن قانون سمسون يعطى مقدار القطاع المتوسط بالتقريب هكذا  $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2s_1^2 + 2s_2^2}{4}$  واذن يكون الحجم بالتقريب  $\frac{1}{11} \pi ه (ب^2 + د^2)$

فاذا أريد الحصول على تقريب أدق من هذا ينبغى أن يقاس القطاع الواقع فى وسط كل نصف من نصفي البرميل وتطبق القاعدة على كل نصف (وهناك طريقة أخرى لقياس حجم برميل موضحة فى بند ١٣٥)

١٢٧ — والقاعدة العامة لتطبيق القانون لأجل تعيين حجم أى جسم بالضبط هى أن تقاس جملة قطاعات عرضية متوازية عندها كاف وتقاس أيضا القطاعات الواقعة فى منتصف المسافات بين كل زوج من القطاعات وتطبق القاعدة على كل قسم من أقسام الجسم

وعلى ذلك اذا فرضنا أن مساحة القطاعات العرضية السابق ذكرها هى سم ٦ سم ٦ سم ٠٠٠ وأن القطاعات الواقعة فى وسط المسافات بين تلك

لـ (سب + ٤ سم + سم) وبمثل ذلك تعين الأجزاء الباقية من الجسم فإذا كانت جميع القطاعات المتوالية متباعدة بالتساوى فإن حجم الجسم يكون هو

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & [0 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)] \cdot 1 \\ & (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \cdot 1 \\ & (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

وذلك بفرض أن  $h$  هو الطول الكلي للجسم المساوى الى  $2 \cdot l$  و عليه يكون القطاع العرضى المتوسط في حالة القطاعات المتباعد المتساوى هو

$$(2) \dots \left( \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} = 6$$

انقوانين الخاصة بالقطاع الواقع في الوسط والقطعين المتطرفين  
(حينما تكون القطاعات متساوية التباعد)

١٢٨ - وفي بعض الأحيان حينما تكون القطاعات العرضية المتوالية

س ٦ سم ٦ ٠٠ لا تختلف عن بعضها كثيرا فان مقدار  $\frac{1}{4}$  (سم + سم) لا يختلف كثيرا عن القطاع المتوسط للجزء المحصور بين سم ٦ سم وكذلك يكون  $\frac{1}{4}$  (سم + سم) متساويا بالتقريب للمتوسط للجزء الواقع بين سم ٦ سم وهكذا بحيث أنه اذا كانت القطاعات على مسافات متساوية فان المتوسط يساوى بالتقريب

$$ع' = \frac{1}{2} \left( ٠٠ + \frac{س٢ + س٣}{٢} + \frac{س٤ + س٥}{٢} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{٢} س٤ + س٣ + س٢ + س١ + ٠٠٠ + \frac{1}{٢} س٣ \right) (٣)$$

ومع ذلك فإنه يمكن الحصول على تقريب أدق للتوسط من القطاعات المتوسطة س١ و س٢ و س٣ و س٤ و س٥ في حالة تساوى تباعد القطاعات

$$ع' = \frac{1}{5} (س١ + س٢ + س٣ + س٤ + س٥) (٤)$$

وأبسط طريقة لاثبات أفضلية هذا التقريب هي أن نلاحظ أن

$$٢ ع' + ع' = ٣ ع (٥)$$

ومن هذه المعادلة يمكن أن يرى أنه إذا فرض أن مقدار ع مضبوط فإن ضبط مقدار ع' هو ضعف ضبط مقدار ع وأن المقدارين التقريبيين ع' و ع أحدهما أكبر من ع والآخر أصغر منه .

لأننا إذا فرضنا أن ع هو مقدار الخطأ في ع' وأن ع' مقدار الخطأ في ع بحيث يكون ع' = ع + ع' و ع = ع' + ع' وعوضنا في معادلة (٥) بمقادير ع' و ع' فالتا نجد

$$٢ ع' + ع' = ٠$$

ومن هنا يعلم أن ع' ضعف ع' وأنها تخالفها في العلامة

وهناك مقدار أضبط من ع' و ع' (الا أنه ليس مضبوطا كضبط ع) وهو

$$ع = \frac{1}{٢} \left( \frac{1}{٢} س٤ + س٣ + س٢ + س١ + ٠٠٠ + \frac{1}{٢} س٣ \right) (٦)$$

وهو مقدار مشابه لمقدار ع' وإنما أخذت فيه جميع القطاعات التي

قيست

ويجب على الطالب أن يقيم البرهان على الارتباطين

$$(٧) \dots\dots\dots ٣ع = ٢ع + ٢ع$$

$$(٨) \dots\dots\dots ٣ع = ٤ع - ٢ع \quad 6$$

التي منها يثبت أن ضبط ع هو ضعف ضبط ع وأربعة أمثال ضبط ع وذلك بفرض أن ع معتبر مضبوطا ضبطا تاما

$$(٩) \dots\dots\dots \frac{1}{٣} (٢ع + ٢ع) = ٢ع \quad \text{والارتباط}$$

يستحق أيضا أن يلتفت إليه

مثال - لفرض أن سب = ١٠٠٠

$$٩٨٥ = س١$$

$$٩٤٠ = س٢$$

$$٨٦٦ = س٣$$

$$٧٦٦ = س٤$$

$$٦٤٣ = س٥$$

$$٥٠٠ = س٦$$

فيكون

$$٨١٨ \frac{٢}{٣} = \frac{٢٤٥٦}{٣} = (٢٥٠ + ٧٦٦ + ٩٤٠ + ٥٠٠) \frac{1}{٣} = ٢ع$$

$$٨٣١ \frac{1}{٣} = \frac{٢٤٩٤}{٣} = (٦٤٤ + ٨٦٦ + ٩٨٥) \frac{1}{٣} = ٢ع$$

$$٨٢٥ = \frac{١٦٥٠}{٤} = (٢ع + ٢ع) \frac{1}{٢} = ٢ع$$

ومقدار ع يمكن إيجاده بطرق متعددة مما تقدم (أو يحسب على انفراد كما سنعمل في المثال الآتي)

واذن يكون

$$٢٤٨١ \frac{1}{٣} = ٢ع + ٢ع$$

$$٢٤٨٦ \frac{1}{٣} = ٢ع + ٢ع$$

$$٢٤٨١ \frac{1}{٣} = ٢ع - ٢ع$$

وعليه فبأى طريقة من تلك الطرق يكون

$$ع = \frac{1}{4} ٨٢٧$$

واذن يكون الخطأ في ع هو  $\frac{4}{8}$  بالنقص (أى نحو واحد في المائة)

$$6 \quad ع \quad \frac{2}{4} \text{ بالزيادة } \frac{1}{4} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

$$6 \quad ع \quad \frac{1}{4} \text{ بالنقص } \frac{1}{4} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»}$$

وهناك مثال آخر — ليكن

$$\text{سب} = ٣٠١ = \text{س} = ٣٢١ = \text{س} = ٣٣٣ = \text{س} = ٣١٣ = \text{س} = ٢٧٩$$

ففى هذه الحالة يكون

$$ع = \frac{1}{4} (٣٣٣ + \frac{٢٨٩+٣٠١}{4}) = ٣١٤$$

$$6 \quad ع = \frac{1}{4} (٣١٣ + ٣٢١) = ٣١٧$$

$$6 \quad ع = \frac{1}{4} (ع + ع) = ٣١٥$$

$$6 \quad ع = \frac{1}{4} (ع + ٢ ع) = ٣١٦$$

١١٩ — وإذا نظرنا الى القانونين التقريبيين ع و ع اللذين فيهما يفرض أن الجسم مقسم الى أقسام عددها د بقطاعات على مسافات متساوية وهى سب و س و س و س وأن القطاعات سب و س و س و س تكون هى القطاعات الواقعة فى وسط هذه الأجزاء فيجب أن يلاحظ أن القانون ع يشمل على القطاعات سب و س و س و س وأن القطاعات المتطرفين سب و س ليس لها سوى نصف أهمية القطاعات الأخرى فى تقدير المتوسط ولكن فى القانون ع الذى هو عبارة عن تقدير المتوسط من القطاعات الواقعة فى وسط كل جزء من الجسم تكون جميع هذه القطاعات متساوية فى الأهمية وينبى أن يلاحظ أن القطاعات المتوالية الواقعة فى وسط الأجزاء هى متباعدة

بالتساوى عن بعضها الا أن تباعد القطاع الأول والأخير أى سم ٦ سم ١-٢-٣ عن طرفي الجسم هما فقط نصف التباعد بين القطاعات المتتالية الواقعة في وسط الأجزاء ومن المهم أن نلاحظ أن المتوسط المتحصل من القطاعات الواقعة في وسط الأجزاء مضبوطة ضعف ضبط ما يتحصل من اعتبار القطاعات المتطرفة

١٣٠ - وفي بعض الأحيان قد يعين المتوسط بأخذ جميع القطاعات سم ٦ سم ٦ ٠٠٠ كأنها متساوية الأهمية ويؤخذ مقدار المتوسط مساويا الى  $\frac{1}{1+2}$  (سم ٦ + سم ٠٠ + سم ٦) الا أن هذا المقدار أبعد عن الحقيقة كثيرا عن بعد المقدار  $\frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{4}$  سم ٦ + سم ٠٠ + ... +  $\frac{1}{4}$  سم ٦) عنها واذن فلا يجوز استعماله أبدا ومما يستحق الاعتبار ملاحظة قيمة هذا التقدير في المثالين المتخمين ففي الأول نجد

$$٨٠١ \frac{1}{4} = \frac{٣٢٠٦}{4} = (٥٠٠ + ٧٦٦ + ٩٤٠ + ١٠٠٠) \frac{1}{4}$$

وهي نتيجة أردأ بكثير من نتيجة التقديرات التقريبية السابقة

وفي الثاني تعطى هذه الطريقة المقدار الآتي

$$٣٠٧ \frac{2}{3} = \frac{٩٢٢}{3} = (٢٨٩ + ٣٣٣ + ٣٠١) \frac{1}{3}$$

وهي نتيجة لا تقارن بالتأخر التي تعطى الطرق المضبوطة وانما ذكرنا هذه الطريقة لاثبات ضرورة اجتنابها فانها ليست مؤسسة على نظرية ولا بسيطة ببساطة تجيب في استعمالها لأنها ليست أسهل من ع ولا من ع

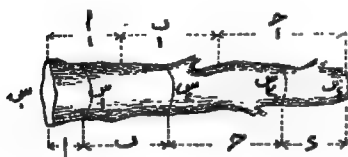
١٣١ - وليس لدينا ملحوظات خاصة بالقانون ع فهو من نوع ع الا أنه مؤسس على قياس قطاعات عددها ضعف ما يلزم في ع ومع ذلك فهو جدير بالاعتبار لأنه بسبب أن عدد القطاعات فيه ضعف عدد قطاعات القانون الآخر يكون ضبطه أربعة أمثال ضبط القانون المذكور



١٣٢ — ولا جرم أنه ليس في الطرق السابقة التقريبية ما يصح مطلقاً أن يقارن من حيث الدقة بقانون ع المتحصل من قانون سامبسون (الا اذا كان الجسم قطعاً مكافئاً تحريكاً فتكون جميع القوانين في هذه الحالة مضبوطة) الا أن قوانين هذا المبحث تستعمل ظالماً في الأعمال بسبب أنها سريعة ولأن الضبط الذي يتحصل منها يكون كافياً في حالة ما يكون الفرق بين القطاعات المتوالية غير كبير وفضلاً عن ذلك فان الحساب بالقانون ع يحتاج الى قياس عدد فردى من القطاعات هي  $٦ \text{ سم} \times ٦ \text{ سم} \times ٦ \text{ سم} \times ٦ \text{ سم}$  ولكن القانون ع لا يحتاج لذلك لأن عدد القطاعات  $٦ \text{ سم} \times ٦ \text{ سم} \times ٦ \text{ سم}$  يمكن أن يكون أى عدد فردى أو زوجى فاذا كان عدد القطاعات المتباعدة عن بعضها بالتساوى زوجياً فيمكن استعمال القانون ع ولكن القانون ع لا يمكن استعماله الا أنه يجب أن نتذكر أن القوانين ع  $٦ \text{ سم} \times ٦ \text{ سم} \times ٦ \text{ سم}$  هي قوانين تقريبية موافقة ليس الا أما القانون ع فهو أفضل ما يمكن الحصول عليه للتقدير في حالة معرفة مقاس القطاعات ومع ذلك فهناك قوانين أخرى من طبيعة القانون ع تستعمل في بعض الأحوال اذا كان عدد القطاعات العرضية المقيسة أكثر من ثلاثة قطاعات متساوية التباعد الا أن القانون ع أكثر استعمالاً وهو أحسن القوانين المعروفة وسنعطى في آخر هذا الفصل القوانين المختلفة الممكن استعمالها وجميعها موضوعة للحصول على أحسن نتيجة بالنسبة للقطاعات التي قيست فعلاً وفي جميع القوانين التي من هذا النوع يفرض أن القطاعات على أبعاد متساوية

القوانين الخاصة بالتقاطع الواقع في الوسط والقطاعات المتطرفين (حينما تكون القطاعات غير متساوية التباعد)

١٣٣ — قد يكون من الموافق في بعض الأحوال أن تؤخذ قطاعات ليست على أبعاد متساوية ففي معظم الأحوال يقسم الجسم الى أقسام طولها متناسب


$$\dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1$$

أو تقسم الى أطوال مقاديرها  $6 \text{ م } 6 \text{ ب } 6 \text{ ح } 6 \dots$  وتقاس القطاعات المتطرفة لهذه الأطوال فلنفرض أن تلك القطاعات العرضية هي  $6 \text{ ب } 6 \text{ ح}$  فيكون المجموع مساويا تقريبا الى

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{\text{سـ}_4 + \text{سـ}_3}{2} ح + \frac{\text{سـ}_3 + \text{سـ}_2}{2} ب + \frac{\text{سـ}_2 + \text{سـ}_1}{2} ا \\ & + \dots + \text{سـ}_4 (ح + ب) + \text{سـ}_3 (ب + ا) + \text{سـ}_2 [ا] \frac{1}{4} = \\ & \quad (\text{الطول الأخير سـ}) \end{aligned}$$

وفي هذا القانون يكون المعامل الذي يضرب فيه كل قطاع وسطي هو البعد بين القطاع الذي قبله والقطاع الذي بعده والمعاملان اللذان يضرب فيهما القطاعان المتطرفان هما البعدان المتطرفان المتعلقان بهما

ويمكن أن تميز الطريقتان أحدهما من الأخرى باسم طريقة القطاعات الواقعة في الوسط وطريقة القطاعات المتطرفة على التناظر ويمكن استعمال كلتا الطريقتين إذا كانت القطاعات المتطرفة للأبعاد ١ ٦ ٦ ٦ ٠ ٠ ٠ هي بنفسها قطاعات في الوسط بالنسبة للأبعاد ١ ٦ ٦ ٦ ٠ ٠ ٠ ( كما هي الحالة المبينة بالشكل ) بشرط أن يقاس بالضرورة القطاعان المتطرفان أيضا فإذا أريد فحص دقة هذه النتيجة فالحساب المضاعف هذه الصورة يكون خير

١٣٤ - والارتباط بين الأطوال  $a$  و  $b$  و  $c$  . . . في حالة ما تكون القطاعات المقيسة هي القطاعات الواقعة في وسط مجموعة الأطوال الأولى وفي الوقت نفسه هي القطاعات المتطرفة للمجموعة الثانية - هو ارتباط لا يخلو من الفائدة وذلك لأن

ومن هنا يكون  $\frac{1}{4} = 1 \dots \dots \dots$

$$1-u = \frac{1}{4} - u = \frac{u}{4} \quad 6$$

$$1 + u - a = u \frac{1}{r} - a = a \frac{1}{r} \quad 6$$

$$\frac{6}{\text{الخ}} = \frac{1}{\frac{1}{x} - s} = \frac{s}{\frac{1}{x}}$$

ومن هذه المعادلات يمكن إيجاد  $a, b, c, \dots$  متى علمت مقادير  $a, b, c, \dots$  ومن الواضح أن عدد الأطوال في المجموعة  $a, b, c, \dots$  ينقص عن عدد الأطوال في المجموعة  $a, b, c, \dots$  بواحد (أنظر الشكل بيند ١٣٣) فمثلا إذا كان  $s$  هو الطول الأخير في المجموعة الثانية فالحد الأخير في المجموعة الأولى هو  $c$  وفضلا عن ذلك فإن  $s$  تكون مساوية إلى  $\frac{1}{4}c$  وبناء عليه يكون  $a - b + c - s = 0$  وبمثل ذلك إذا كان كل من  $s$  و  $c$  هما الطولين النهائيين في المجموعتين فيلزم أن يكون  $\frac{1}{4}c = s$  وبناء على ذلك يكون  $a - b + c - s = 0$ .

واذن فلو كانت الأطوال ١ ٦ ب ٦ ح ٦ ٠ ٠ ٠ ٠ ٠ مكيفة بحيث  
تكون القطاعات النهائية لها هي القطاعات الواقعة في وسط أى مجموعة من  
المسافات ١ ٦ ب ٦ ح ٦ فيلزم أن يكون

$$١ - ب + ح - د + ٥ = ٠ \dots$$

وهذا هو الشرط الوحيد اذا لم يكن لدينا اعتراض على كون بعض الأبعاد  
١ ٦ ب ٦ ح ٦ ٠ ٠ ٠ ٠ ٠ سالبا فاذا أريد تجنب ذلك فيجب أن تكون جميع  
الكميات المتوسطة ب - ١ ٦ ح - ب + ١ ٦ د - ح + ب -  
١ ٦ ٠ ٠ ٠ موجبة

فاذا كان ٣ هو عدد الأطوال في المجموعة ١ ٦ ب ٦ ح ٠ ٠ ٠ فالشرط  
اللازم السابق يمكن بيانه جبريا بأن يقال ان الدالة ١ سر<sup>١</sup> + ب سر<sup>١</sup> +  
ح سر<sup>٢</sup> + ٠ ٠ ٠ يجب أن تكون قابلة للقسمه على سر + ١ بلون باق  
فاذا قسمت بهذه الكيفية فليس من الصعب أن نرى أن خارج القسمه هو

$$\frac{1}{4} (١ سر^{-١} + ب سر^{-٢} + ح سر^{-٣} + ٠ \dots)$$

لأننا اذا ضربنا هذا المقدار في سر + ١ كان الحاصل :

$$\frac{1}{4} (١ سر + ب + ١) سر^{-١} + \frac{1}{4} (ب + ح) سر^{-٢} + ٠ \dots$$

وهذا المقدار هو بذاته المقدار

$$١ سر + ب سر^{-١} + ح سر^{-٢} + ٠ \dots$$

فاذا كانت مقادير ١ ٦ ب ٦ ح ٠ ٠ ٠ معلومة بحيث تكون ١ - ب  
+ ح - ٠ ٠ ٠ ٠ ٠ ٠ ٠ ٠ فربما كانت أحسن طريقة لاستخراج مقادير ١  
٦ ب ٦ ح ٠ ٠ ٠ متى كانت القطاعات متعلّقة هي طريقة القسمه السابق  
ذكرها

مثال — اذا كانت قطعة خشبية مستديرة طولها ٩,٦٠ مترا وقطاعاتها العرضية هي كما يأتي

وأحسن طريقة لترتيب هذه المعالم هي كما يأتي

أبعاد بالمتر	قطاعات عرضية بالمترا المربع
١,٢٠	٢
٣,٠٠	١,٥٠
٣,٦٠	١,٢٠
١,٨٠	٠,٩٠
	٠,٦٠

$$2,7. ) \leq ( 2,7. + 2,0. ) \leq ( 2,0. + 1,2. ) \leq 1,2. \\ 1,8. \leq ( 1,8. +$$

يمكن إجراء العملية بالاختصار كما هو موضح بعد



وحيث أنه يمكن اعتبار الحجم مساويا إلى ١١,٣٣ مترا مكعبا وهذا التقدير يمكن اعتباره عقلا مختلفا عن الحجم الحقيقي بأقل من ٠,٠٦ مترا مكعبا أى بنحو نصف من مائة وهذا المقدار يسمى الجزء المئتين المشكوك فيه فإذا أريد أن يكون الحساب أدق من ذلك يلزم أن تقاس قطاعات أكثر عددا مما سبق أو تؤخذ القطاعات على مسافات تسمح باستعمال قانون سمسون ومع ذلك ففي حالة الأخشاب التي على حالتها الطبيعية إذا أريد الحصول على دقة عظيمة في تعيين المتوسط بقياس القطاعات العرضية فإن النتيجة تكون خادعة وذلك لأن قياس مساحة القطاعات العرضية بغاية الدقة أمر صعب والخطأ في هذا المقاس يكون أكبر من  $\frac{1}{4}$  في المائة بكثير

١٣٥ - ومتى كانت القطاعات العرضية دائرية فمساح القطاعات يمكن الحصول عليها إما بقياس الأقطار أو بقياس المحيطات ففي الحالة الأولى تكون المساحة هي ط ب  $= \frac{1}{4} ط د$  وفي الحالة الثانية تكون المساحة  $\frac{1}{4} م^2$  مقدار م هو المحيط  $= ٢ ط ب$  ومقدار ط  $= ٣,١٤١٦$  واذن يكون  $\frac{1}{4} ط = ٠,٧٨٥٤$  أو تقريبا  $\frac{11}{14} م$   $\frac{1}{4} ط = ٠,٧٩٦$  أو نحو ثمانية في المائة

ومع ذلك فإن الجارى عملا في تقدير أحجام الأخشاب التي ليس شكلها منتظما أن يكون القياس غير دقيق بالمرّة فيعين المحيط المتوسط إما بأخذ المتوسط الحسابي لقطاعات متساوية التباعد عن بعضها وإما بالاعتصار على قياس محيط القطاع الواقع في وسط الطول أو في أى نقطة بين قطاع وسط الطول وبين الطرف الغليظ ثم يعتبر مربع ربع هذا المحيط قطاعا عرضيا متوسطا فإذا كان م هو المحيط المتوسط المحسوب فالقطاع المتوسط المحسوب بهذه الطريقة هو  $(\frac{1}{4} م)^2 = ٠,٠٦٢٥ م^2$  وهذا المقدار أقل بكثير من القطاع الحقيقي

والفرق هو مقدار مسموح به لأنه يعدم في عمليات تخليم شكل الخشب وهذه هي الطريقة المتبعة في انكلترا والهند ولكن في أوروبا يعين الحجم بطرق أدق ولا يترك شيء في نظير ما يعدم من الخشب

### ١٣٦ — المتوسط الحسابي لقطاعات مخصوصة

ان القانون الخاص بحساب حجم برميل بدلالة قطاعي نهايته وقطاعه الذي في الوسط هو

$$\frac{H}{6} (S_1 + 4S_2 + S_3)$$

ومن المفيد أن نلاحظ أن السعة يمكن أيضا تقديرها بقياس قطاعين عرضيين فقط بشرط أن ينتخبا في أحسن وضع فإذا كان البرميل مخروطا ناقصا أو قطعة كروية ناقصة أو مجسما ناقصا فإن هذه الطريقة تعطى نتيجة مضبوطة وفي أحوال أخرى تكون تقريبية (أنظر مسألة ٣ من تمرينات ١٧) ويبنى أن تقاس القطاعات على أبعاد من جانبي القطاع الواقع في الوسط

بقدر  $\frac{H}{3}$  والقطاع المتوسط هو نصف مجموع هذين القطاعين وفي أغلب البراميل يكون هذان القطاعان متساويين ويكون كل منهما حيثئذ هو القطاع المتوسط واذن ففي مثل هذه الأحوال يكون من الضروري قياس قطاع عرض واحد فقط

وأبعاد هذه القطاعات عن طرفي البرميل

$$= \frac{H}{2} - \frac{H}{3\sqrt{2}} = \frac{H}{6} (3 - \sqrt{2}) = 0.2113H$$

أو أزيد قليلا من خمس طول البرميل

وفما يتعلق بقياس البرميل يبنى للطالب أن يرجع الى بند ١٩٤ فيجد طريقة سريعة في تعيين السعة



## تمريعات (٢١)

(١) المطلوب إيجاد سعة برميل مقاسه الداخلى كما يأتى — الارتفاع ٠,٩ متر وقطر القاعدة ٠,٦ متر وقطر من الوسط ٠,٧ متر

(٢) المطلوب بيان أن القطاعين العرضيين لمخروط ناقص على بعدين متساويين (سـ) من قاعدتيه هما ط  $\left[ 1 + \frac{2}{3}(1 - b) \right]$  وط  $\left[ b + \frac{2}{3}(1 - b) \right]$  على التاظر وإيجاد المتوسط الحسابى لهذين القطاعين وبيان مقدار زيادة ذلك عن القطاع الواقع فى الوسط

(٣) بين أن القطاع المتوسط للمخروط الناقص يمكن أن يكتب بالصورة

$$\frac{1}{4} ط \left[ \frac{1}{4}(1 + b)^2 + \frac{1}{4}(1 - b)^2 \right]$$

ويعين مقدار سـ الذى به يكون القطاع المتوسط مساويا للمتوسط الحسابى للقطاعين المذكورين فى المسألة السابقة

(٤) المطلوب بيان الخطأ الناشئ عن قياس القطاعين العرضيين على بعد قدره ١٠ هـ من النهايتين واعتبار متوسطهما الحسابى قطاعا متوسطا

(٥) جذع شجرة طوله ٧,٢٠ أمتار ومحيطاته على التوالى هى — على بعد ١,٢٠ متر من الأرض يبلغ المحيط ٣ أمتار وعلى بعد ٣,٦٠ أمتار يبلغ ٢,٤٠ أمتار وعلى بعد ٦ أمتار يبلغ ١,٥٠ متر والمطلوب إيجاد حجم الشجرة بفرض أن القطاعات دائرية

(٦) جذع شجرة طوله ١٥ مترا ومحيطاته على التوالى هى ٦ أمتار على بعد ١,٢٠ متر ٦ ٢,٤٠ على بعد ١,٢٠ متر من القمة وفى القطاع الواقع فى وسط الطول ٣,٦٠ أمتار والمطلوب إيجاد الحجم بفرض أن القطاعات العرضية مستديرة

وبمثل ذلك في أى عدد من القطاعات

(١١) المطلوب بيان أنه اذا كانت الأبعاد  $a, b, c, \dots$  كيات صحيحة (بالمتر أو بأى وحدة) فان القطاعات العرضية المتطرفة لها لا يمكن أن تكون قطاعات في وسط مسافات أخرى  $a, b, c, \dots$  الا اذا كان  $a + b + c + \dots$  عددا زوجيا

(١٢) اذا كان  $a, b, c, \dots$  هي أبعاد القطاعات المتوالية المقيسة من القطاع الأول  $a$  فالمطلوب بيان أن الأبعاد بين القطاعات هي المعاملات للقوى المختلفة للكمية  $a$  في حاصل الضرب

$$(a^2 + b^2 + c^2 + \dots) (a - b - c - \dots)$$

(١٣) المطلوب بيان أنه اذا كانت القطاعات لجسم طوله  $L$  على أبعاد قدرها  $a, b, c, \dots$  عن القطاع  $a$  هي القطاعات التي في الوسط المسافات  $a, b, c, \dots$  فيجب تحقق الارتباط  $a - b + c - \dots = \pm \frac{L}{2}$

وأن المقادير  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$  هي المعاملات للقوى المختلفة للكمية  $a$  في خارج القسمة

$$[a^2 + (b - a)^2 + (c - b)^2 + \dots + 0] \div (a + b + c + \dots)$$

(١٤) قدم جسم الى أربعة أقسام وكانت أبعاد قطاعاتها التي في الوسط عن احدى نهايتي الجسم هي ٤ أمتار و ١٤ مترا و ٢٥ مترا و ٣٣ مترا على التوالي فمقدار الحجم اذا كانت مساحة هذه القطاعات هي على التناظر ١٤ و ١٠ و ٨ و ٧ أمتار مربعة

(١٥) إذا كان القطاعان المتطرفان في المسألة السابقة هما ٢٠ مترا مربعا و٦ أمتار مربعة فالمطلوب حساب الحجم بواسطة قانون القطاعات المتطرفة وإيجاد المقدار المئيني للخطأ المحتمل وجوده في متوسط الحسابين

(١٦) جسم طوله ٢٤ مترا وقطاعاته مستديرة قسم الى أقسام طول كل منها ٦ أمتار وكان طول المحيطات الواقعة في وسط طول تلك الأقسام هو ١٠ أمتار و ١٢ مترا و ٩ أمتار و ٥ أمتار على التناظر والمطلوب إيجاد الحجم

(١٧) أقطار القطاعين المتطرفين في الجسم السابق قيسست أيضا فوجد أنها على التناظر  $2\frac{1}{4}$  متر ومتر واحد والمطلوب إيجاد الحجم بواسطة قانون القطاعات المتطرفة ومقارنة النتائج

(١٨) مخروط ناقص قسم الى جزأين متساويي الطول والمطلوب حساب مساحات القطاعات الواقعة في وسط طول كل منهما بمعلومية أن ١ ٦ ب هما نصف قطرَي القاعدتين (أنظر المسألة الثانية من هذا التمرين)

(١٩) المطلوب حساب حجم المخروط الناقص بواسطة قانون القطاع الواقع في وسط الطول باستعمال القطاعين الواقعين في وسط الطول في المسألة السابقة — وبيان أن الحجم أقل من الحقيقة بقدر  $\frac{ط}{٤٨} (ب - ب')$  و هو ارتفاع المخروط الناقص

(٢٠) قسم مخروط ناقص الى قسمين طولهما على التناظر من ٦ ص (بحيث يكون س + ص = هـ) والمطلوب بيان أن الحجم المحسوب بدلالة هذه الأطوال بواسطة قانون القطاعات التي في وسط الطول

$$= \frac{ط}{٤} [ (ب + ب')^٢ + (ب - ب')^٢ ]$$

(٢١) المطلوب بيان أنه من المستحيل أن ينتخب الطول  $s$   $6$  ص بحيث تعطى طريقة القطاع الواقع في الوسط حجما صحيحا وان أقل خطأ يحصل حينما يكون  $s = 6$  ص

(٢٢) المطلوب إيجاد مساحة القطاع العرضي لقطعة كروية ناقصة على بعد قدره  $s$  من القاعدة التي نصف قطرها يساوي  $1$  وذلك بفرض أن المساحة هي على الصورة  $1 + 3s + 3s^2$  وإيجاد مقادير  $1$   $6$   $6$   $6$  بأن يوضع على التوالي  $s = 0$   $6$   $\frac{1}{4}$   $6$  هـ

(٢٣) المطلوب إيجاد المتوسط الحسابي للقطاعات على بعد قدره  $s$  من كل قاعدة ثم إيجاد مقدار  $s$  الذي به يكون المتوسط المذكور مساويا للقطاع المتوسط للقطعة الكروية الناقصة

(٢٤) قطعة كروية ناقصة مقسومة الى قسمين طولهما على التناظر  $s$   $6$  ص والمطلوب بيان أن الحجم المحسوب بدلالة هذين الطولين بواسطة قانون القطاع الواقع في وسط الطول =

$$6\text{ هـ} \left[ \frac{1}{4} (1 + 3s) + \frac{1}{4} (3s^2 - s) \right]$$

(٢٥) المطلوب بيان أن أقل خطأ في استعمال هذا القانون السابق يحصل حينما يكون  $s = 6$  ص ثم إيجاد مقدار هذا الخطأ ثم امتحان الناتج بالاستعانة بمسألة ٢٣ السابقة وذلك بأن يوضع  $\frac{1}{4}$   $6$   $6$   $6$  بدلا من  $s$  في قانون المتوسط الحسابي

## طرق عمومية لايجاد القطاع العرضى المتوسط من جملة قطاعات عرضية متوازية متساوية التباعد

### ١٣٧ - قانون سمبسون

وفضلا عن قانون سمبسون الذى استعملناه لآن فان هناك قانونا آخر يسمى القانون الثانى لسمبسون ويطبق على أربعة قطاعات متساوية التباعد بعضها وقد يكون من المفيد فى بعض الأحيان استعماله ولأجل التمييز يطلق اسم قانون سمبسون الأول على القانون الذى استعمل فيما سبق الى الآن وهذان القانونان اللذان استنبطهما فى أول الأمر كوتس ونيوتون أدخلهما فى علم تقدير السطوح والأحجام العمل توماس سمبسون الذى كان أستاذا للرياضة فى المدرسة الحربية الملكية فى وولوش بانجلترا من سنة ١٧٤٣ الى سنة ١٧٦١

والقانون الأول لسمبسون هو أنه اذا كان سب ٦ سم ٦ سم ٦ سم ثلاثة قطاعات متوازية ومتساوية التباعد لجسم فان القطاع العرضى المتوسط لجزء الجسم المحصور بين سم ٦ سم هو حسب ما يعين من هذا العدد من القطاعات

$$\frac{1}{4} (\text{سم} + 4 \text{سم} + \text{سم})$$

وهذا هو القانون الذى سبق لنا استعماله كثيرا

والقانون الثانى لسمبسون هو أنه اذا كانت سم ٦ سم ٦ سم ٦ سم أربع قطاعات متساوية التباعد لجسم فان القطاع العرضى المتوسط لجزء منه محصور بين سم ٦ سم هو حسب ما يعين من هذا العدد من القطاعات :

$$\frac{1}{8} (\text{سم} + 3 \text{سم} + 3 \text{سم} + \text{سم})$$

$$\frac{1}{2}(\bar{u}_3 + \bar{u}_4)$$
$$\left( \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{16}$$
$$\frac{1}{4} (س + ٥س١ + ٣س٢ + ٦س٣ + ٤س٤ + ٥س٥ + ٣س٦)$$

(١) بقانون سيمسون الأول ويساوى

$$\frac{1}{18} (سب + ٤سم + ٢سم + ٤سم + ٢سم + ٤سم + سم)$$

(٢) وبقانون سيمسون الثانى ويساوى

$$\frac{1}{16} (سب + ٣سم + ٣سم + ٢سم + ٣سم + ٣سم + سم)$$

(٣) وبقانون ويل ويساوى

$$\frac{1}{4} (سب + ٥سم + سم + ٦سم + سم + ٥سم + سم)$$

مثال - المطلوب إيجاد القاطع العرضى المتوسط بكل من الطرق الثلاث

الحالة الآتية :

مس = ۵۰۰

فيجب أن توضع المسامخ بحيث تكون مرتبة على حسب المضارب المطلوبة كما سيئين فيما بعد وينبغي أن يلاحظ أنه في حالة تطبيق قانون ودل يكون القطاع الذى في وسط الطول داخلا في كل من العمودين وهو أمر يضمن ضربه في ٦ بدون اجراء عملية خاصة



قانون سيمسون الأول		قانون سيمسون الثاني		قانون ودل	
س <sub>١</sub> = ٩٨٥	س <sub>٢</sub> = ٩٤٠	س <sub>١</sub> = ٩٨٥	س <sub>٢</sub> = ١٠٠٠	س <sub>١</sub> = ٩٨٥	س <sub>٢</sub> = ١٠٠٠
س <sub>٣</sub> = ٨٦٦	س <sub>٤</sub> = ٧٦٦	س <sub>٣</sub> = ٨٦٦	س <sub>٤</sub> = ٩٤٠	س <sub>٣</sub> = ٨٦٦	س <sub>٤</sub> = ٩٤٠
س <sub>٥</sub> = ٦٤٣	١٧٠٦	س <sub>٥</sub> = ٦٤٣	س <sub>٦</sub> = ٥٠٠	س <sub>٥</sub> = ٦٤٣	س <sub>٦</sub> = ٥٠٠
٢٤٩٤	٢	٢٤٩٤	٣٣٣٤	٢٤٩٤	٣٣٣٤
	٣٤١٢		٣٣٣٢		٣٣٣٢
	٩٩٧٦		٣٣٣٢ × ٣ = ١٠٠٠٢		٣٣٣٢
	(س <sub>١</sub> + س <sub>٢</sub> + س <sub>٣</sub> + س <sub>٤</sub> ) = ٩٩٧٦				
	(س <sub>١</sub> + س <sub>٢</sub> ) = ٣٤١٢				
	س <sub>١</sub> = ١٠٠٠				
	س <sub>٢</sub> = ٥٠٠				
	٢ ÷ ١٤٨٨				
	٩ ÷ ٧٤٤٤				
	٨٢٧ $\frac{1}{9}$				

الجواب بقانون سيمسون الأول =  $\frac{1}{9} \times ٨٢٧$

» » الثاني =  $\frac{1}{8} \times ٨٢٧$

» ودل = ٨٢٧,١

أى أن المتوسط بالقانون  $\frac{1}{9}$  (س<sub>١</sub> + س<sub>٢</sub> + س<sub>٣</sub> + س<sub>٤</sub>) يساوى  $\frac{1}{9} \times ٨٢٧$  وبمقتضى القانون  $\frac{1}{8}$  (س<sub>١</sub> + س<sub>٢</sub> + س<sub>٣</sub> + س<sub>٤</sub>) يساوى  $\frac{1}{8} \times ٨٢٧$  ومن هنا يرى أن التقريب الأول في القانون قريب جدا من أدق الطرق لتعيين المتوسط ومتى حصل ذلك فإن المتوسط المستخرج يمكن التعميل عليه في تعيين أكبر مقدار للحجم

١٣٩ — وفي حالة ما تعطى القوانين المختلفة: مقادير مختلفة للتوسط فان المقدار المعين بقانون ودل هو الأقرب الى الضبط الا أنه من الواضح أن الحجم المضبوط لا يتعلق بالقطاعات السبعة التي قيست بل يتعلق أيضا بشكل الجسم فيما بين تلك القطاعات وهذه القوانين مبينة على فرض أن هناك تغيرا تدريجيا في القطاع في جميع الطول وما يوجد في الجسم من البروز ينبغي أن يلاحظ حين أخذ المقاسات ثم يحسب مقدارها ضمنا في هذه المقاسات أو تحسب على حلتها والا فليس في الامكان أن يقال بأن قانونا مؤسسا على قياس عدد معين من القطاعات يؤدي الى نتيجة مضبوطة

١٤٠ — وترتيب القوانين من حيث دقتها أو بحسب ما يرى من الدقة المحتملة فيها مع ذكر القانونين اللذين لا تدخل فيهما جميع القطاعات المقيسة ضمن هذا الترتيب هو كما يأتي مرتبة بعكس الدقة

اذا كان  $a, b, c$  هي مقادير المتوسطات المنتهية بتطبيق قانون سمسون الأول مرة أو مرتين أو ثلاث مرات  $b, c, a$  هما المتوسطات المنتهية بتطبيق قانون سمسون الثاني مرة أو مرتين  $c, a, b$  هو المتوسطات المتحصل بتطبيق قانون ودل مرة فانه يكون

$$a = \frac{1}{4} (b + c + 4a)$$

$$b = \frac{1}{8} (c + a + 3b)$$

$$c = \frac{1}{16} (a + b + 3c)$$

$$a = \frac{1}{18} (b + c + 2a)$$

$$b = \frac{1}{20} (c + a + 5b)$$

فإذا رمز بحرف  $\alpha$  للقدر  $\frac{1^1 - 2^1}{8}$  وبحرف  $\epsilon$  للقدر  $\frac{1^6 - 2^6}{15}$   
فأضبط قانون يمكن الحصول به على القطع المتوسط من قياس سبعة قطاعات  
هو أحد هذين القانونين المتكافئين وهما  $\frac{1^9 - 2^9}{5} = 6$   $\frac{1^8 - 2^8}{5}$

١٤٢ — ولأجل الحصول على الحجم يلزم ضرب القطاع العرضي المتوسط في الطول أى في المسافة (ل) التي بين القطاعين النهائيين أو بدلاً من تنعيم عملية إيجاد القطاع المتوسط وضرب الناتج في ل يمكن أن نضرب أتبته أمثال القطاع المتوسط في الطول ل بين قطاعين متوالين لأن  $ل = \frac{1}{4} ل$  وعلى ذلك يكون مقدار الحجم المتحصل من سبعة قطاعات هو أحد المقادير الآتية

$\frac{1}{4} \text{ لـ (سب + ٤ س١ + ٢ س٢ + ٤ س٣ + ٢ س٤ + س٥) } \text{ أو } \frac{2}{8} \text{ لـ (سب + ٣ س١ + ٣ س٢ + ٢ س٣ + ٣ س٤ + س٥) } \text{ أو } \frac{3}{12} \text{ لـ (سب + ٥ س١ + س٢ + ٦ س٣ + س٤ + ٥ س٥) } \dots$   
 وفي حالة اختلاف النتائج فالأظهر أن المقدار الأخير هو الأقرب للصواب

## تمريعات (٢٢)

- (١) المطلوب اثبات أن  $٩ ل - ٤ پ = ٥ و$   
 (٢) المطلوب اثبات أن  $٢ ح - ٤ س = ٥ و$   
 (٣) اذا كان  $و$  مفروضاً أنه المقدار المضبوط فالمطلوب البرهنة بموجب الارتباطات الميئة في بند ٦٤ على أنه

(١) اذا وجد خطأ في مقدار  $١$  فانه يكون أكبر من الخطأ في  $ل$  بقدر ٨١ مرة

- (ب) وان الخطأ في  $پ$  أكبر من الخطأ في  $پ$  بقدر ١٦ مرة  
 (ح) وأن الخطأ في  $پ$  أكبر من الخطأ في  $١$  بقدر  $٢ \frac{1}{4}$  مرة  
 (د) بمساعدة ما ذكر في المثال السابق المطلوب المقارنة بين الخطأ في  $١$  والخطأ في  $پ$

(٥) المطلوب إيجاد القطاع العرضي المتوسط لجسر بمعلومية المسامح الآتية للقطاعات العرضية التي على أبعاد متساوية بما فيها القطاعان المتطرفان وهي  
 ١٠٨٠,١ ٦ ٩٢٤,٤ ٦ ٧٦٣,٤ ٦ ٥٩٦,٩ ٦ ٤٢٥,١ ٦ ٢٤٧,٩ ٦  
 ٦٥,٤ متراً مربعاً وإيجاد مقادير  $١$  و  $ل$  اللذين يكونان في هذه الحالة متساويين تقريباً

(٦) المطلوب إيجاد القطاع العرضي المتوسط حينما تكون مسامح القطاعات المتساوية التباعد بالمترا المربع هي  $٢٧٥٥,٧$  ٦  $١٣٥٢٨,١$  ٦  $٨٠٢٧,٧$  ٦  
 ١٤٤٥,٠ ٦  $١٠٩,٣$  ٦  $٤,١$  ٦  $٠,١$  باستعمال القوانين  $پ$  ٦  $ل$  ٦  
 و امتحان النتيجة بمساعدة الارتباط  $٩ ل - ٤ پ = ٥ و$

(٧) في المثال السابق ذكره المطلوب معرفة مقادير  $ا$  و  $ب$  ثم استخراج مقدار  $ح$  و  $د$  باستعمال المعادلتين  $ح = ا + \frac{1}{8} (ا - ب)$  و  $د = ب + \frac{1}{10} (ب - ا)$

(٨) في المثال السابق المطلوب إيجاد أدق مقدار للتوسط بواسطة كلا المقدارين  $ا$  و  $ب$   $\frac{2}{3} (ا - ح) + ا$  و  $\frac{1}{3} (ب - د) + ب$  وذلك باستعمال أحد المقدارين لتحقيق المقدار الثاني

(٩) المطلوب إيجاد حجم التراب الداخل في تكوين جسر طوله ٦٠٠ متر اذا كانت القطاعات العرضية على أبعاد متساوية مقدار كل منها ١٠٠ متره على التناظر ١٩٥ ٦ ١٧٤٧ ٦ ٢٤١٤ ٦ ٢٤٥٨ ٦ ٢١١٠ ٦ ١٥٦١ ٦ ٩٧٠ ٦ مترا مربعا

١٤٣ — اذا كانت القطاعات المعلومة أقل من سبعة قطاعات متساوية التباعد عن بعضها ففي هذه الحالة لا يمكن تطبيق قانون ودل الا أنه يمكن استعمال أحد قانوني سمبسون أو كليهما الا في حالة ما اذا لم يكن معلوما سوى القطاعتين المتطرفتين ففي هذه الحالة يكون من الضروري استعمال بعض طرق خصوصية متعلقة بشكل الجسم المعلوم أو المفروض بين القطاعتين وسنشير الى هذه الحالة أيضا في البحث الخاص بكيفية حساب قطاعات الحفر والردم الا أنه في أكثر الأحوال يكون الأصوب أن تقاس مقاسات أخرى منها يمكن حساب القطاع الواقع في الوسط ثم يطبق قانون سمبسون الأول ولذا لا نتكلم بعد ما تقدم على هذه الحالة في هذا الفصل

١٤٤ — اذا علمت ثلاثة قطاعات قاسمة للجسم الى جزأين فيمكن تطبيق قانون سمبسون الأول ويكون مقدار القطاع المتوسط هو

$$ا = \frac{1}{3} (س + د + سم)$$

ويكون الحجم هو  $ل \cdot ا \cdot \frac{1}{4}$  أو  $ل (سب + ٤ سم + سم)$   
 ١٤٥ - وإذا علمت أربعة قطاعات قاسمة للجسم الى ثلاثة أقسام  
 فيجب استعمال قانون سمسون الثانى فيكون القطاع المتوسط هو

$$ب = \frac{1}{8} (سب + ٣ سم + ٣ سم + سم)$$

ويكون الحجم مساويا الى  $ل ب = \frac{3}{8} ل (سب + ٣ سم + ٣ سم + سم)$

١٤٦ - وإذا علمت خمسة قطاعات قاسمة للجسم الى أربعة أجزاء فان  
 القطاع المتوسط يمكن تحصيله إما بالقانون التقريبي

$$ا = \frac{1}{4} (سب + ٤ سم + سم)$$

أو بالقانون الأضبط وهو

$$ل = \frac{1}{12} (سب + ٤ سم + ٢ سم + ٤ سم + سم)$$

وأحسن طريقة هي إيجاد كل من  $ا$  و  $ل$  وفي كثير من الأحوال قد تتحد  
 مقاديرهما أو تتقارب بحيث يكفى الحاسب بالاعتصار على مقدار  $ل$  لأن  
 اتحاد المقدارين هو ضمانه للضبط وفضلا عن ذلك فاذا وجد فرق كبير  
 بين المقدارين (ولم يكن ذلك ناشئا عن غلط في الحساب نفسه) فانه يمكن  
 الجمع بينهما واستخراج قانون أضبط بكثير مما ذكر لأنه يكون مضبوطا ضبطا  
 يعادل ما يتحصل من الخمسة القطاعات وذلك القانون هو

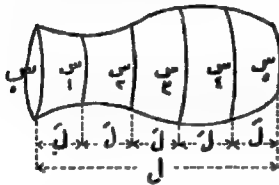
$$\frac{ا^{16} - ا}{10} = \text{القطاع المتوسط}$$

وهذا القانون يمكن أن يكتب هكذا  $ل + \frac{1}{10} (ا - ل)$

(وينبغى مقارنة هذا القانون مع القانون الدقيق، المستخرج من  $ب$  و  $ب$

في حالة وجود سبع قطاعات معلومة بند ١٤١)

١٤٧ — اذا علمت ستة قطاعات متساوية التباعد بحيث تقسم الجسم الى خمسة أجزاء فانه يمكن أن يستعمل قانون سمبسون الأول في إيجاد حجم جزأى الجسم من احدى نهايتيه وقانون سمبسون الثانى في إيجاد حجم الثلاثة الأجزاء الباقية أو يستعمل قانون سمبسون الأول في أربعة أجزاء من الجسم ثم يقدر الجزء الخامس بأى طريقة خاصة أو تستعمل الطريقة الآتية التى هى أكثر تماثلاً



فبقانون سمبسون الأول يكون الحجم  
المحصور بين القطاعين سم ٦ سم  
 $\frac{1}{4} L (س١ + س٢ + س٣ + س٤ + س٥ + س٦)$

والحجم المحصور بين سم ٦ سم =  $\frac{1}{4} L (س١ + س٢ + س٣ + س٤ + س٥ + س٦)$   
ومجموع هذين المقدارين

$\frac{1}{4} L (س١ + س٢ + س٣ + س٤ + س٥ + س٦ + س٦ + س٥ + س٤ + س٣ + س٢ + س١)$   
وهو أكبر من الحقيقة بمقدار الحجم المحصور بين سم ٦ سم الذى هو  
بموجب قانون سمبسون الثانى  $\frac{3}{8} L (س١ + س٣ + س٣ + س٥ + س٥)$   
فبطرح هذه الزيادة وملاحظة أن  $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$  فان القانون النهائى  
يكون  $\frac{1}{4} L (س١ + س٢ + س٣ + س٣ + س٤ + س٤ + س٥ + س٥)$   
 $- \frac{1}{24} L (س١ + س٣ + س٣ + س٥ + س٥)$   
وهذا المقدار فى نهاية الضبط -

والقطاع العرضى المتوسط المستخرج من هذا القانون هو

$\frac{1}{10} L (س١ + س٢ + س٣ + س٣ + س٤ + س٤ + س٥ + س٥)$   
 $- \frac{1}{120} L (س١ + س٣ + س٣ + س٥ + س٥)$

ومع ذلك فهناك قانونان أكثر اختصاراً يمكن تطبيقهما في هذه الحالة مع أن كل واحد منهما ليس دقيقاً على انفراده كدقة القانون المتقدم إلا أنه يمكن الجمع بينهما لانتاج قانون أضبط ومع ذلك فالأحسن أن يحسب بموجب قانونين متى كان ذلك ممكناً حتى يمكن أن يحقق أحدهما الآخر والقانونان المذكوران هما (للقطاع العرضي المتوسط)

$$م = \frac{1}{24} (2سب + 5سم + 5سم + 5سم + 5سم + 5سم + 2سم)$$

$$6م = \frac{1}{24} (سب + 8سم + 3سم + 3سم + 3سم + 8سم + سم)$$

والقانون الذى يعطى أحسن مقدار للمتوسط حسبما يستخرج من قياس ستة قطاعات هو  $\frac{1}{12} (7م + 5م)$

وهذا القانون يمكن أن يكتب هكذا

$$م + \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) (م - م)$$

والفرق بين  $م$  و  $6م$  هو  $\frac{1}{24} (سب - 3سم + 2سم + 2سم - 3سم + سم)$

في حالة ما تكون المقادير الرقمية لكل من  $م$  و  $6م$  غير متساوية يكون من الصواب حساب هذا الفرق على انفراده للتحقق من أن عدم التساوى ليس ناشئاً من خطأ في الحساب

مثال :

المطلوب إيجاد متوسط القطاعات الكائنة على أبعاد متساوية ومساحة كل

منها هي ٠ ٢٠ ٦ ١٤١ ٦ ٣٨٣ ٦ ١٠٦٨ ٦ ٣٨٢٠ ٦ متراً مربعاً



$\mu - \mu$	$\mu$	$\mu$
$3820 = \mu + \mu$	141	20
$1048 = (\mu + \mu)$	383	1068
4868	524	1088
$3364 = (\mu + \mu)$	3	8
1604	1072	8704
$= 4 \div$	$= 4 \div 14096$	$1612 = 4 \div$
401	$= 6 \div 3402$	$8060 = 6 \div$
$= 6 \div$	$\mu = 587 \frac{1}{4}$	$\mu = 604 \frac{1}{6}$
$66 \frac{5}{6} = \mu - \mu$	$(\mu - \mu) \frac{1}{2} = 33 \frac{5}{12}$	
	$(\mu - \mu) \frac{1}{12} = + 5 \frac{1}{2}$	
	$\therefore \text{المتوسط الحقيقي} = 626 \frac{1}{4}$	

وهذا المثال انما انتخاب لفرض بيان انه قد يكون الفرق جسيما بين  $\mu$  و  $\mu$   
 الا أنه حتى في هذه الحالة يكون مقدار  $\mu$  قريبا جدا من الحقيقة وأحسن  
 طريقة للعمل بموجب هذا القانون موضحة فيما يلي

القانون هو

$$\mu = \frac{1}{10} [(\mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu)]$$

$$- \frac{1}{8} (\mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu + \mu)$$

١٤١ = سب	٢٠ = سب	٠ = سب
٣٨٣ = سب	١٠٦٨ = سب	٣٨٢٠ = سب
٥٢٤ = سب + سب	١٠٨٨ = سب + سب	٤٣٥٢ = (سب + سب)
	١٥٧٢ = (سب + سب) ٣	١٥٧٢ = (سب + سب) ٣
	٨ ÷ ٣٦٦٠ =	٩٧٤٤
	٣٣٢ ١/٢ =	يطرح منه ٣٣٢ ١/٢ =
		٣ ÷ ٩٤١١ ١/٢ =
		٥ ÷ ٣١٣٧ ١/٢ =
		١٢ = ٦٢٧ ١٣/٢ =

ومن هنا يتضح أن هذا القانون يحدث خطأ في المقدار المتوسط مساويا للوحدة فقط حتى في حالة ما يكون م ٦ م مختلفين بأكثر من ٦٦ وحدة وبناء على ذلك يظهر أنه هو الأحسن في جميع الأغراض العملية الا فيما يتعلق بتحقيق الحساب وفضلا عن ذلك فانه في ايجاد الحجم بواسطة م لا ضرورة للقسمة الأخيرة على ٥ والحجم يساوى ١/٢ ٣١٣٧ مضروبا في الطول لـ الواقع بين قطاعين متوالين

### تمرينات (٢٣)

المعلوم المجموعات التسعة الآتية للقطاعات العرضية المتساوية التباعد بما فيها القطاعات المتطرفة والمطلوب ايجاد الأجام في كل حالة مع العلم بأن البعد بين كل قطاعين متوالين هو ١٠٠ متر على التناظر

- (١) ٣٠١,٠٣ ٦ ٤٧٧,١٢ ٦ ٦٠٣,٠٦ مترا مربعا  
 (٢) ١٥٠٦ ٦ ١٧٧٣ ٦ ٢٠١٧ ٦ ٢٢٣٨ مترا مربعا  
 (٣) ٢٨٥ ٦ ٢٩٨ ٦ ٢٩٩ ٦ ٢٨٨ مترا مربعا  
 (٤) ١٤٢٢٦,٣ ٦ ١٤٣٩٥٨,٥ ٦ ١٥٨,٧ ٦ ٤٤١٥٨,٨ ٦ ٤٣٨٥٤,٩ ٦ ٤٣٦١١,٩  
 مترا مربعا

- (٥) ٢٠٦٦ ٦ ٢٤١٨ ٦ ٢٤٧٧ ٦ ٢٠٧٧ ٦ ١٠٢٨ مترا مربعا  
 (٦) ١٧٦,٨ ٦ ٢٤٠,٣ ٦ ٢٤٣,٤ ٦ ١٨٨,١ ٦ ٩٠,٢ »  
 (٧) ٨٦ ٦ ٢١٨ ٦ ٣٤٦ ٦ ٤٧٠ ٦ ٥٨٨ ٦ ٦٩٩ »  
 (٨) ٧٨٦ ٦ ١٣٩٧ ٦ ١٦٨٥ ٦ ١٦٠١ ٦ ١١٨١ ٦ ٥٣٣ »  
 (٩) ١٦٥٣ ٦ ٢٦٨٨ ٦ ٣٢١٣ ٦ ٣٣٢٨ ٦ ٣١٢٥ ٦ ٣٦٨٨ »

(١٠) المطلوب بيان أن القانون م، المتوسط ستة قطاعات عرضية متساوية التباعد يختلف عن المتوسط الحقيقي الذي مقدارها  $\frac{1}{12}(٣٧ + ٣٥)$  بقدر  $\frac{1}{6}(٣ - ٣)$  أى بقدر

$$\frac{1}{1440} (٣ - ٣ + ٣ - ٣ + ٣ - ٣ + ٣ - ٣)$$

(١١) المطلوب بيان أنه اذا كان

$$٣ - ٣ + ٣ - ٣ + ٣ - ٣ + ٣ - ٣ = ٠$$

فان جميع القوانين الخاصة بالقطاع المتوسط في القطاعات الستة المتساوية

$$\text{التباعد تعطى نتيجة واحدة أى أن } ٣ = ٣ = ٣$$

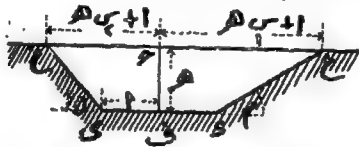
$$(١٢) \text{ المطلوب بيان أن } ٣ = ٣ = ٣$$

## الفصل السابع

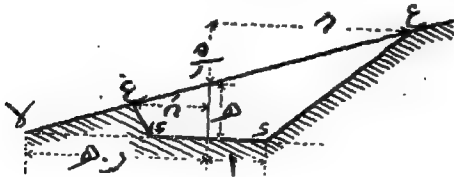
### تقدير الحفر والردم

#### أولا - مساح القطاعات

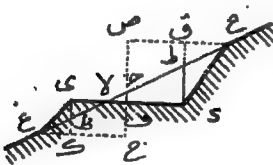
١٤٨ - ان ما يدخل تقديره في هذا البحث هو ما يلزم إزالته في حفر الأخدود لطريق أو لسكة حديد أو ما يلزم اضافته لعمل جسر فالقطاع العرضي لهذا الجسر أو ذلك الأخدود هو شكل رباعي أحد أضلاعه أفقي وعرضه على العموم واحد في جميع المسافة الواقعة بين نهايتي الأخدود أو الجسر لسكة حديد طولها معلوم الا أنه اذا أريد زيادة مقدار العرض لأسباب خصوصية كما في تفريغ خطوط السكك الحديدية وغير ذلك وهذا الخط يسمى عرض القاعدة اذ هو عرض قاع الأخدود أو أعلى الجسر



أما الخطوط الأخرى للقطاع فهي خط سطح الأرض الطبيعي وخطا ميل الأخدود أو الجسر وإس هناك فرق هندي بين قطاع الأخدود وقطاع الجسر اذ أن أحدهما هو مقلوب الآخر



وهناك ثلاث حالات خصوصية يجب ملاحظتها عند حساب مساحة مثل هذا القطاع وذلك تبعا لكون (١) السطح الطبيعي أفقي في جميع عرض القطاع (٢) السطح يميل ميلا عرضيا (وفي هذه الحالة يقال ان القطاع ذو ضلع مائل) ولكن لا يقطع القاعدة (٣) الأرض لها ضلع مائل قاطع للقاعدة بحيث ان جزءا من القطاع يقع في الحفر والجزء الآخر في الردم أما الكميات التي تقاس فهي عرض القاعدة وسيمرز اليه بالرمز (١٢) والجانبان المائلان وحين ما تكون الأرض غير أفقية في العرض يقاس أيضا الضلع المائل للأرض ثم المسافة الرأسية من وسط القاعدة الى السطح الطبيعي للأرض وهذه المسافة تسمى الارتفاع المتوسط أو العمق المتوسط للقطاع



ويقدر ميل الجانبين غالباً بدلالة ظل تمام الزوايا المحصورة بين الجانبين والأفق وفي هذه الأشكال  $س$  هو عرض القاعدة  $ك$   $ع$   $غ$  هو خط سطح الأرض الطبيعي

$ك$   $ع$   $س$   $غ$  هما الجانبان المائلان  $ح$   $ف$  هو الارتفاع المتوسط  $هـ$

١٤٩ - مساحة القطاع العرضي حينما تكون الأرض أفقية عرضيا

القطاع في هذه الحالة شبه منحرف

فنفرض  $١٢$  عرض القاعدة  $ك$   $هـ$  المسافة بين القاعدة والسطح الطبيعي أي ارتفاع شبه المنحرف ولنفرض أن الزاويتين الخارجيتين للجانبين المائلين هما  $م$   $ك$   $ل$  فينتج أن يزيد عرض السطح عن عرض القاعدة بالمقدار  $هـ$   $ظ$   $ن$   $م$   $+$   $هـ$   $ظ$   $ن$   $ل$  والمقداران  $هـ$   $ظ$   $ن$   $ل$   $ك$   $هـ$   $ظ$   $ن$   $م$  هما عرض الميلين

فالمساحة =  $\frac{1}{3} ه (٤ + ه ظتا ل + ه ظتا ل)$

وإذا كان ميل الجانبين

متساويين فالمساحة =

ه (١٢ + ه ظتا م)

وميل الجانبين يقدر غالبا

كما تقدم بدلالة ظتا م كظتا ل

وليس بالمقدارين م و ل أى بميل أفقى معين للرأسى المساوى للوحدة فاذا  
رمزنا لهاتين الكيتين بالمقدارين م و ل وحين تساويهما بالمقدار م فقط

فان المساحة = ه (١٢ +  $\frac{١٢ + م}{٢}$ )

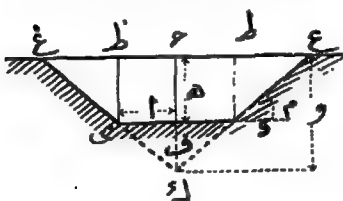
وإذا كان ميل الجانبين متساويين كما هو الحال غالبا

فان المساحة = ه (١٢ + م)

١٥٠ - المساحة بدلالة الارتفاع المكبر ونصف عرض القطاع

(بفرض الأرض أفقية فى العرض)

إذا كان الجانبان متساويين فى الميل فانهما يتقابلان لومدا فى نقطة ك  
الواقعة على الخط ح ف المنصف القطاع فارتفاع المثلث الأكبر ع غ ك



المكون بهذه الطريقة يساوى

ه + ١ ظا م =

ه +  $\frac{١}{م}$  ويسمى هذا

الارتفاع بالارتفاع المكبر أو

العمق المكبر للقطاع وسيرمز

اليه بحرف و بحيث يكون

و = ه +  $\frac{١}{م}$

ونصف عرض القطاع ح ع = ١ + ه ظلًا م = ١ + س ه ه .  
 فإذا رمزنا له بحرف د يكون

$$د = ١ + س ه = س و$$

ومساحة المثلث ع غ ك = د و التي يمكن كتابتها س و أو  $\frac{د}{س}$

$$\text{ومساحة المثلث الزائد د ع ك} = ١ \left( \frac{١}{س} \right) = \frac{١}{س}$$

$$\text{ومنها تكون مساحة القطاع} = س و - \frac{١}{س}$$

$$\frac{١ - د}{س} =$$

وباستبدال مقادير و د بما يساويها بدلالة ه ١ ٦ ٦ س المتقدمة  
 وإجراء عملية الاختصار نجد أن هذه المقادير تتفق بل ويجب أن تتفق  
 في المساحة مع مقادير البند السابق أى أن

$$\text{مساحة القطاع} = ه (١٢ + س ه)$$

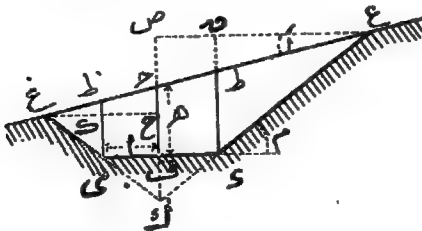
فالقوانين بدلالة و د سهلة الحساب خصوصاً إذا كان لدى الحساب  
 جدول مربعات الأعداد مثل جداول بارلو

١٥١ - والغالب أن يكون ميل جانبي الأخدود أو الجسر لسكة  
 حديدية واحداً ويختلف الميل تبعاً لطبيعة الأرض من ١ في الأفق : ١  
 في الرأسي أى ٥ : ٤ الى ٥ في الأفق : ١ في الرأسي أى نحو ١ : ١٠ أما عرض  
 قاعدة الأخدود أو أعلى الجسر فواحد في جميع طوله وعمق الأخدود أو ارتفاع  
 الجسر هو الكمية التي تختلف من قطاع الى آخر ويترتب على اختلافها  
 اختلاف مساحة القطاع فإذا قيست هذه الكمية فيمكن الحصول على  
 مساحة القطاع بواسطة أحد القوانين المتقدمة حينما يكون أعلى القطاع أفقياً  
 أو كما يقال حينما يكون جميع سطح الأرض أفقياً عرضياً أما عرض

الأخدود أو الجسر عند سطح الأرض فهو ٢ (١ + سه هـ) إذا كانت سه واحدة في كلا جانبي القطاع ٦ (١ + سه هـ) + (١ + سه هـ) إذا كانت سه في أحد جانبي القطاع غيرها في الجانب الآخر وتسمى كل من هاتين الكيتين ١ + سه هـ ٦ ١ + سه هـ نصف العرض ولو لم تكونا متساويتين وتقاسان من خط رأسي يمر من منتصف القاعدة يسمى الخط المتوسط للقطاع والخط الذي يمر من منتصف قاعدة كل قطاع سواء كان قريبا من الأفق كثيرا أو قليلا يسمى الخط المتوسط للأخدود أو الجسر وأنصاف العرض المتقدم ذكرها تين المقدار اللازم من عرض الأرض في كل من جهتي هذا الخط المتوسط للأخدود أو الجسر وقد ذكرت فيما تقدم في البندين ٣٧ ٦ ٣٨ طرق حساب كمية الأرض اللازمة لخط طوله معلوم مع معلومة العروض أيضا في نقط مختلفة متساوية التباعد عن بعضها على طول الخط

## ١٥٢ — القوانين الخاصة بالحالة التي فيها الضام المائل للأرض غير قاطع للقاعدة

القوانين المتقدمة في بندي ١٤٩ و ١٥٠ لايجاد مساحة ونصف عرض القطاعات خاصة بالحالة التي تكون الأرض فيها أفقية عرضيا





فلنفرض أن  $\alpha$  هي زاوية ميل الأرض الطبيعية وأن  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$  (أولاً) لنفرض الحالة التي يكون ميل الجانبين فيها واحدا وظل تمام ذلك الميل  $\alpha$  ونفرض في الشكل أن  $\alpha$  هو خط سطح الأرض  $\alpha_1$   $\alpha_2$  القاعدة  $\alpha$   $\alpha$  الخط المتوسط

ونصفاً عرض القطاع هـ ع ص و غ ح ويرمز اليهما بحرفي د ك  
أما عرض الميل من الجانبين فهو ع و ك غ ك ويحصل عليهما بطرح ا  
من مقادير د ك

ثم بدلالة د فيكون  $و = ص ك - ص ح = \frac{د}{ص} - \frac{د}{ص}$

وبمثل ذلك اذا اخذنا  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = ح ك + ح ح = ح$  فنحصل على

و مجموع العرض  $\dot{D} + D = 1 + \frac{r_2}{r_2 - r_1} = 1 + 1 = 2$  (هـ)

وحاصل ضرب نصفى العرض مهم فيما يتعلق بمساحة القطاع ويوصل اليه القانون

$$\frac{r_2^2}{r_2 - r_1} (1 + s ه) = د د$$

ونصف العرض على ارتفاع ه من القاعدة هو كمية مهمة يمكن للتسهيل الرمز اليها بحرف ب لتقابل ١ الذى هو نصف العرض عند القاعدة ويمكن الحصول عليها بالمعادلة  $ب = ١ + س ه$  وهى مكافئة لـ  $ك$  حينما تكون الأرض أفقية عرضيا

## (٢) مساحة القطاع

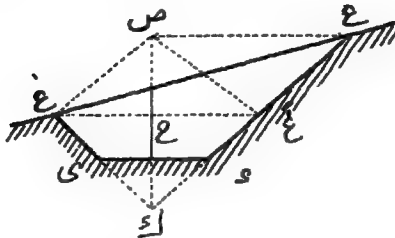
مساحة المثلث ع غ ك  $= \frac{١}{٢} و$  و  $(د + د) = \frac{r_2^2}{r_2 - r_1} و$  و  
اطرح من هذه المساحة المساحة الموجودة تحت القاعدة و  $س$  التى تساوى  $\frac{١}{س}$

فتكون مساحة القطاع  $= \frac{r_2^2}{r_2 - r_1} (ه + \frac{١}{س}) - \frac{١}{س}$   
فاذا كان نصف العرض معلومين أمكن الاستفادة من قانون  $\frac{١}{س} و (د + د) - \frac{١}{س}$  ولكن أبسط قانون لتعيين المساحة بدلالة نصفى عرض القطاع وميل الجانبيين هو

$$\frac{د د - ١}{س} = \text{المساحة}$$

وهذا القانون ينتج مباشرة من مقدار  $د د$  المتقدم الذكر ومن المفيد أيضا اثبات هذا القانون بالطريقة الآتية من غير الاستعانة بما تقدم

فد الخط غ ح ليقابل الخط ع ك فى النقطة غ ووصل غ ص  
فـ غ ص فيكون المثلث غ ع غ مساويا فى للمساحة للمثلث ع ص غ  
اذ أن قاعدتهما واحدة ومحصوران بين نفس الخطين المتوازيين



وعلى ذلك يكون المثلث ع غ ك مساويا في المساحة للشكل الرابع  
غ ك غ ص الذي على شكل طائرة ومساحته = غ ع . ص ك

$$\text{واكن } ع ع = د د \text{ ص ك} = \frac{ص ع}{س} = \frac{د د}{س}$$

$$\text{وعلى ذلك تكون مساحة المثلث ع ع ك} = \frac{د د}{س}$$

اطرح من هذا المقدار  $\frac{١١}{س}$  أى مساحة المثلث الزائد د ع ك فتحصل

$$\text{على مساحة القطاع ع غ س وهي } \frac{١١ - د د}{س}$$

### (٣) شبه المنحرف المكافئ

من المفيد أحيانا معرفة مقدار عمق أى قطاع خطه السطحي أفقى اذا  
كانت مساحة هذا القطاع مساوية لمساحة القطاع المعلوم

فمن الممكن الحصول على أبسط مقدار للعمق المكبر لهذا القطاع أى المسافة  
بين ك والخط السطحي للأرض

وهذا العمق يسمى بالعمق المكبر للقطاع المكافئ الأفقى السطح  
وازمز اليه بحرف و

وحينئذ تكون المساحة طبقا لبند ١٥٠ =  $٠.٢٠ - \frac{٢}{٣}$

$$\text{ومنها} \quad ٠.٢٠ = \frac{٢}{٣} - \frac{٢}{٣}$$

وعلى ذلك فالجذر التربيعي لهذا المقدار هو مقدار العمق المكبر المطلوب و  
ومن السهل أن نرى أن  $٠.٢٠$  هي الوسط المناسب الهندسي بين  
ك ص ٠.٢٠ ك ح

$$\text{وذلك لأن} \quad \frac{٠.٢٠}{٣} = \frac{٢}{٣} - \frac{٢}{٣} \quad \text{و}$$

$$\text{ك ح} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣} - \frac{٢}{٣} \quad \text{و}$$

$$\text{ومنها} \quad \text{ك ص} = ٠.٢٠ \text{ ك ح} - ٠.٢٠$$

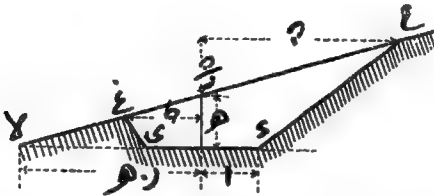
ويجب ملاحظة أن والتي هي العمق المتوسط المكبر للقطاع الأصلي  
هي الوسط المناسب التوافقي بين ك ص ٠.٢٠ ك ح

ومن الموافق أن نسمى القطاع المكافئ ذا السطح الأفقي بشبه المنحرف  
المكافئ أى شبه المنحرف المتحد في المساحة مع القطاع المعلوم والمتحد معه  
أيضا في القاعدة وفي ميل الجانبين وارتفاعه =  $٠.٢٠ - \frac{١}{٣}$

ويمكن رسم ذلك الشكل هندسيا بالطريقة المذكورة في بند ١١٥ التي  
يجب الإشارة إليها هنا

فنصف عرضه  $\frac{١}{٣}$  هو الوسط المناسب الهندسي بين  $\frac{١}{٣}$  و  $\frac{١}{٣}$  وذلك  
لأن المساحة المكبرة =  $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} = ٠.٢٠$  وأيضا  $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣} = ٠.٢٠$   
ومنها  $\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$

(ثانيا) اذا كان القطاع المعلوم ذا ميلين مختلفين ظل تمامهما سم ٦ سم على التناظر فالخطان ع و ٦ غ لا يتقابلان حيثئذ في الخط المتوسط واذا فن الضروري قسمة القطاع بكيفية أخرى وهناك طريقة سهلة لتعيين المساحة وهي مد الخط السطحي ع غ حتى



يقابل القاعدة في النقطة لا وأخذ الفرق بين مساحة المثلثين لا ع و ٦ لا ع فانصاف العرض د ٦ د للقطاع هي المطلوب تعيينها وتعين بالقانونين الآتيين

$$(1 + \text{سم} \text{ ه}) \frac{\text{سم}}{\text{سم} - \text{سم}} = \text{د}$$

$$(1 + \text{سم} \text{ ه}) \frac{\text{سم}}{\text{سم} + \text{سم}} = \text{د}$$

وذلك تبعاً لما تقدم في أول هذا البند تحت (أولاً) (١)

فالقاعدة لا و للثلث لا ع =  $\text{سم} \text{ ه} + 1$  وارتفاعه =  $\text{ه} + \frac{\text{د}}{\text{سم}}$

$$\frac{1 + \text{سم} \text{ ه}}{\text{سم} - \text{سم}} = \frac{\text{سم} + 1}{\text{سم} - \text{سم}} + \text{ه}$$

$$\frac{\text{سم} (1 + \text{سم} \text{ ه})}{(\text{سم} - \text{سم})^2} = \text{وعلى ذلك فالمساحة}$$

$$\text{والقاعدة لا و للثلث لا ع} = \text{سم} \text{ ه} - 1$$

$$\frac{1-hr}{r+m} = \frac{h^2+m+1}{r+m} - h = \frac{3}{r} - h = \text{وارتفاعه}$$

$$\frac{h^2(1-hr)}{(r+m)^2} = \text{فالمساحة}$$

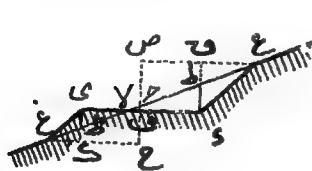
$$\frac{h^2(1-hr)}{(r+m)^2} - \frac{h^2(1+hr)}{(r-m)^2} = \text{واذن لمساحة القطاع المطلوبة}$$

ويجب امتحان هذا القانون بوضع  $m = m$  و  $m = -m$  وتحويله الى الصورة الآتية

$$\frac{h^2}{m} - \left( \frac{1}{m} + h \right) \frac{r^2-m}{r^2-m^2}$$

### ١٥٣ - القوانين الخاصة بالحالة التي فيها الضلع المائل للأرض قاطع للقاعدة

وقد بقيت هناك حالة أخرى وهي التي فيها يقطع خط ميل الأرض القاعدة بحيث أن جزءا من القطاع يقع في الحفر والجزء الآخر في الارتفاع



لنفرض أن لا هي النقطة التي يتقابل فيها الخط السطحي مع القاعدة ولنفرض أن هذه النقطة على يسار الخط المتوسط كما في الشكل

$$\text{فيكون} \quad \text{لا} = r - h$$

بجزء القطاع يتركان من مثلثين متشابهين قاعدتهما على التناظر

$$1 + r - h - r$$

$$\frac{r+1}{r-r} = \text{وارتفاع المثلث الأيمن}$$

$$\frac{r^2(r+1)}{(r-r)^2} = \text{وعليه مساحة هذا المثلث}$$

$$\frac{r^2(r-1)}{(r-r)^2} = \text{وبمثل ذلك تكون مساحة المثلث الأيسر}$$

لأن النسبة بين مساحة المثلثين المتشابهين كالنسبة بين مربعي الضلعين المتناظرين  $1 + r - 16 - r$ .

ونصفا عرض القطاع هما

$$\frac{r}{r-r} = 1 + r$$

$$\frac{r}{r-r} = 1 - r$$

$$\frac{r^2}{r-r} = 10$$

وللاحظ أن هذا المقدار غير متعلق بالمقدار  $r$ .

١٥٤ - خلاصة القوانين الخاصة بقطاع الحفر والردم

(١) الأرض أفقية عرضيا

$$\text{نصف عرض القطاع} = 1 + r$$

$$\text{عرض الميل} = r$$

$$\frac{r}{r-r} = \frac{1}{r} + r = \text{الارتفاع أو العمق الكبير و}$$

$$\text{مساحة القطاع} = r(12 + r)$$

$$r - 2 = \frac{1}{r}$$

$$\frac{r-2}{r} =$$

(٢) الأرض مائلة ولكن خط الميل لا يقطع القاعدة

نصف عرض انقطاع

$$\frac{\sqrt{r}}{r+s} = \frac{\sqrt{r}}{r-s} = \frac{1}{2} (1+s) = \frac{1}{2} (1+s)$$

$$\frac{r^2}{r^2-s^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1+s)$$

$$\frac{r^2}{r^2-s^2} = \frac{1}{2} (1+s)$$

ونصف العرض عند الارتفاع  $h$  عن القاعدة  $b = 1 + s$

ونصف عرض شبه المنحرف المكافئ  $\frac{1}{2} (1+s) = \frac{1}{2} (1+s)$

وعرض ميل الجانبين  $1 - \frac{1}{2} (1+s) = \frac{1}{2} (1-s)$

$$\frac{s}{r-s} = \frac{1}{2} (1-s)$$

$$\frac{s}{r+s} = \frac{1}{2} (1-s)$$

$$\frac{b}{s} = \frac{1}{s} + h = \frac{1}{s} + h$$

$$\frac{r}{r^2-s^2} = \frac{1}{r^2-s^2} + \frac{h}{s}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s} = \frac{1}{r-s} - \frac{1}{r+s} = \frac{1}{r^2-s^2}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s} = \frac{1}{r^2-s^2}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s} = \frac{1}{r^2-s^2}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s} = \frac{1}{r^2-s^2}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s} = \frac{1}{r^2-s^2}$$

(٣) الأرض مائلة وخط الميل قاطع للقاعدة



نصف عرض القطاع

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + 1) = \frac{1}{2} (1 - 1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

وعرض ميل الجانبين

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + 1)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - 1)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + 1)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - 1)$$

تمرينات (٢٤)

(١) ترعة أرض قاعها ٤٠ مترا وعمقها ١٠ أمتار وميل جانبها ٥°  
(١ = ١)

والمطلوب تعيين مساحة القطاع العرضي للترعة

(٢) من الارتباطات و  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  أثبت أن

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + 1)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - 1)$$

( ملحوظة — المقدار الأول من المقدارين المذكورين مهم من حيث  
القوانين الخاصة بتعيين المساحة والثاني يمكن استعماله كطريقة مفيدة للتحقق  
من الضبط الحسابي حين حساب مقدار  $\frac{1}{2}$  )  
المطلوب إيجاد نصف عرض ومساحات القطاعات في المسائل الآتية التي  
في كل منها  $1 = 10$  أمتار

$$(٣) \text{ السطح أفقى فى جميع العرض أى } \text{م} = ٦٠٠ \text{ م} = ٦٠٠ \text{ م} = ١$$

$$٦٠٠ \text{ م} = ١٥ \text{ مترا}$$

$$(٤) \text{ م} = ٦٠٠ \text{ م} = ١٥٠ \text{ م} = ١٢,٧ \text{ مترا}$$

$$(٥) \text{ م} = ٤٠٠ \text{ م} = ٢٠٠ \text{ م} = ١٠ \text{ أمتار}$$

$$(٦) \text{ م} = ٢٣٠ \text{ م} = ١٠٠ \text{ م} = ١٢ \text{ مترا}$$

$$(٧) \text{ م} = ١٢,٥ \text{ م} = ١٥٠ \text{ م} = ١١,٣ \text{ مترا}$$

$$(٨) \text{ م} = ١٠٠ \text{ م} = ٢٠٠ \text{ م} = ٨ \text{ أمتار}$$

$$(٩) \text{ م} = ١٠٠ \text{ م} = ٢٠٠ \text{ م} = ٤ \text{ أمتار}$$

$$(١٠) \text{ م} = ١٠٠ \text{ م} = ٢٠٠ \text{ م} = ١ \text{ متر}$$

القطاعات فى المسائل الآتية جزء منها واقع فى الحفر والآثر فى الردم  
فإذا كانت ه موجبة يكون الجزء الأكبر من القطاع واقعا فى الحفر أما  
إذا كانت ه سالبة فان الجزء الأكبر يكون واقعا فى الردم والمطلوب إيجاد  
مساحة الأجزاء التى فى الحفر وكذا التى فى الردم فى المسائل الآتية :

$$(١١) \text{ م} = ٤٠٠ \text{ م} = ١٥٠ \text{ م} = ٢ \text{ متر}$$

$$(١٢) \text{ م} = ٣,٥ \text{ م} = ١٥٠ \text{ م} = ١,٥ \text{ متر}$$

$$(١٣) \text{ م} = ٣٠٠ \text{ م} = ١٥٠ \text{ م} = ٠$$

$$(١٤) \text{ م} = ٣٠٠ \text{ م} = ١٥٠ \text{ م} = ٠,٥ \text{ متر}$$

$$(١٥) \text{ م} = ٣٠٠ \text{ م} = ١٥٠ \text{ م} = ٢,٥ \text{ متر}$$

(١٦) إذا كان جزء من القطاع واقعا فى الحفر والآثر فى الردم فالمطلوب  
اثبات أن الفرق بين مساحة الجزئين مساو لمساحة مستطيل قاعدته العرض  
الكلى للقطاع وارتفاعه هو الارتفاع المتوسط له

(١٧) المطلوب اثبات أنه إذا كانت  $\overline{m}$  صغيرة بالنسبة الى  $\overline{r}$  يكون مقدار

$$\sqrt{\frac{\overline{r}_2}{\overline{r}_2 - \overline{r}_1}} \text{ قريبا جدا من } 1 + \frac{\overline{r}_2}{\overline{r}_2 - \overline{r}_1}$$

(١٨) المطلوب إيجاد مقدار  $\overline{r}$  (العمق المكبر لشبه المنحرف المكافئ) ومقدار  $\overline{r} - \frac{1}{\overline{r}}$  في المسائل (٥) الى (١٠) وذلك مع الاستعانة بالنتيجة السابقة

(١٩) إذا كانت  $\overline{r} = \overline{r}_1 + \frac{1}{\overline{r}_1} = \overline{r}_2 + \frac{1}{\overline{r}_2}$  فالمطلوب اثبات أن

$$\frac{\overline{r}}{3} (\overline{r}_1^2 + \overline{r}_1 + \overline{r}_2 + \overline{r}_2^2) - \frac{\overline{r}}{3} (\overline{r}_1^2 + \overline{r}_1 + \overline{r}_2 + \overline{r}_2^2) + 1 = \frac{\overline{r}}{3} (\overline{r}_1^2 + \overline{r}_1 + \overline{r}_2 + \overline{r}_2^2)$$

(٢٠) المطلوب بيان أنه في الأرض المائلة حينما يكون ميل الجانبين مختلفا  $(\overline{r}_1, \overline{r}_2)$  يمكن كتابة المساحة باحدى هاتين الصورتين

$$(1) \frac{1}{4} \left( \frac{\overline{r}_2 - \overline{r}_1}{\overline{r}} - \frac{\overline{r}_1 - \overline{r}_2}{\overline{r}_1 \overline{r}_2} + \frac{\overline{r}_1 - \overline{r}_2}{\overline{r}_1 \overline{r}_2} \right)$$

$$(2) \frac{\overline{r}_2 - \overline{r}_1}{2} \left( \frac{1}{\overline{r}_1} + \frac{1}{\overline{r}_2} \right) + \frac{1}{4} (\overline{r}_2 - \overline{r}_1) \left( \frac{1}{\overline{r}_1} - \frac{1}{\overline{r}_2} \right)$$

(٢١) المطلوب بيان أنه في الحالة المذكورة في المسألة ٢٠ يكون جزأ المساحة الواقعان على جانبي الخط المتوسط هما على التناظر

$$\frac{1}{4} \left( \frac{\overline{r}_2}{\overline{r}} - \frac{\overline{r}_1 - \overline{r}_2}{\overline{r}_1 \overline{r}_2} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{\overline{r}_2}{\overline{r}} + \frac{\overline{r}_1 - \overline{r}_2}{\overline{r}_1 \overline{r}_2} \right)$$

(٢٢) في الحالة نفسها المطلوب اثبات أن

$$\frac{1 - \overline{r}_2}{\overline{r}_1 \overline{r}_2} - \frac{1 - \overline{r}_1}{\overline{r}_1 \overline{r}_2} = \frac{\overline{r}_2 + \overline{r}_1}{\overline{r}}$$

## ثانيا - حجم الحفر والردم

١٥٥ - إذا أخذت القطاعات على أبعاد متساوية أمكن تعيين الحجم بواسطة أحد القوانين التقريبية المذكورة في آخر الفصل الثاني من هذا الكتاب ولكن في أحوال كثيرة نظرا لتغير ميل الأرض وما ينتج عن ذلك من تغير التدرج في السكك يحصل على ضبط أشد بأخذ مقاس القطاعات عند بداية ونهاية كل جزء يكون قريبا من الشكل المنشوري قريبا كافيا أما هذه الأجزاء فتختلف بالطبع كثيرا في طولها وحينئذ إذا قدرنا قطاعا واقعا في وسط القطاعين المتطرفين فالتنا محصل على حجم كل جزء منشوري بالقانون المستبسط من القانون الأساسي للأشكال المنشورية

$$هـ . \quad \frac{س + س_١ + س_٢}{٦}$$

والغرض من هذه القوانين الخاصة هو أن يتيسر حساب الحجم المنشوري من المقاسات المأخوذة في القطاعين المتطرفين بدون حساب مساحة القطاعات المتطرفة والتي في الوسط فعلا

أما الكميات الثابتة في الحفر أو الردم فهي عادة عرض القاعدة ٢ ١ وظل التمام هـ لميل الجانبين أما الكميات التي تختلف باختلاف القطاعات فهي الارتفاع المتوسط أو العمق المتوسط هـ وظل التمام هـ لميل الأرض

١٥٦ - إيجاد حجم جزء منشوري طول هـ مع معلومية أن الأرض

أفقية عرضيا ارتفاع القطاعين هـ ١ هـ ٢

$$(١) \quad \text{مساحة القطاع المتطرف الأول} = ١٢ هـ + س هـ$$

$$\text{مساحة القطاع المتطرف الثاني} = ١٢ هـ + س هـ$$

مساحة القطاع الواقع في وسط الطول

$$= ١٢ \frac{س + س_١ + س_٢}{٢} + س \left( \frac{س + س_١}{٢} \right)$$

ومن ذلك يكون الحجم =

$$\text{ص } 11 \left( \text{هـ} + \frac{1}{2} \right) + \text{سـ} \cdot \frac{\left( \frac{1}{2} \text{هـ} + \frac{1}{2} \text{هـ} + \frac{1}{2} \text{هـ} \right)}{3} \cdot 100 \text{ (هـ)}$$

وهذا يمكن كتابته بهذه الصورة

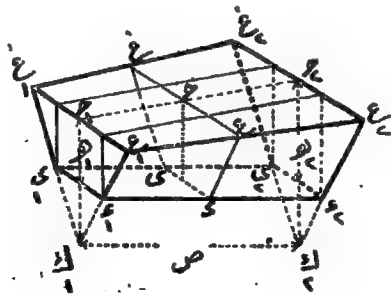
$$\text{ص } 11 \left( \text{هـ} + \frac{1}{2} \right) + \text{سـ} \cdot \frac{\left( \frac{1}{2} \text{هـ} + \frac{1}{2} \text{هـ} + \frac{1}{2} \text{هـ} \right)}{3}$$

والصور الأخيرة أوفق قليلا بالنسبة للحساب العددي . وهناك صورة أخرى تصلح للحساب بالاستعانة بالورق المقسم الى مربعات وهى :

$$\text{ص } 11 \left( \text{هـ} + \frac{1}{2} \right) + \text{سـ} \cdot \left\{ \left( \frac{\frac{1}{2} \text{هـ} - \frac{1}{2} \text{هـ}}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} + \left( \frac{\frac{1}{2} \text{هـ} + \frac{1}{2} \text{هـ}}{2} \right) \right\}$$

وفى هذه القوانين يكون القدر ص 10 (هـ + هـ) هو حجم الجزء المتوسط الذى عرضه 12 المحصورين مستويين رأسيين والقدر المضروب فى الكمية سـ هو حجم الجزئين الواقعين على جانبي الجزء المتوسط والالذين هما هرمان ناقصان

وهناك صورتان أخريات لمقدار الحجم يحذر ملاحظتهما ويمكن الحصول عليهما بحساب حجم الجسم المكبر أولا وهو هرم ناقص ثم نطرح من ذلك



المقدار حجم الجزء المنشوري الواقع تحت القاعدة المستوية  $\epsilon \epsilon \epsilon$  في الشكل

(٢) مساحة القطاعين المتطرفين للمهرم الناقص المذكور هما  $\epsilon$  و  $\epsilon$  على التناظر وفي ذلك  $\epsilon = \epsilon + \epsilon + \epsilon = \epsilon + \epsilon + \epsilon$  ومساحة القطاع الواقع في الوسط هي  $\epsilon \left( \frac{\epsilon^2 + \epsilon^2}{2} \right)$

وعلى ذلك يكون القطاع المتوسط  $\epsilon = \left\{ \epsilon + \epsilon + \epsilon \right\} \frac{1}{3} = \left\{ \epsilon + \epsilon + \epsilon \right\} \frac{1}{3}$

والقطاع العرضي للمنشور الذي يجب طرحه  $\frac{\epsilon^2}{\epsilon}$  وعلى ذلك يكون الحجم  $\epsilon = \left\{ \epsilon + \epsilon + \epsilon \right\} \frac{1}{3} - \left\{ \epsilon \right\} \frac{1}{3} \dots (و)$

وهنا  $\epsilon$  هي طول الجسم

(٣) مساحة قطاعات الهرم الناقص يمكن تقديرها بدلالة نصفى العرض  $\epsilon$  و  $\epsilon$  وفي ذلك  $\epsilon = \epsilon + \epsilon + \epsilon = \epsilon + \epsilon + \epsilon$  القطاعين المتطرفين هي  $\epsilon$  و  $\epsilon$  على التناظر ومساحة القطاع الواقع في وسط الطول  $\epsilon = \left( \frac{\epsilon^2 + \epsilon^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{\epsilon}$

وعلى ذلك القطاع المتوسط  $\epsilon = \left\{ \epsilon + \epsilon + \epsilon \right\} \frac{1}{3} = \left\{ \epsilon + \epsilon + \epsilon \right\} \frac{1}{3}$

وبطرح  $\frac{\epsilon^2}{\epsilon}$  وهي قطاع المنشور الزائد من هذه الكمية وضرب الناتج في المقدار  $\epsilon$  وهو طول الجسم نحصل على القانون الآتي :

$$\text{الحجم} = \frac{\epsilon}{3} \left( \epsilon - \frac{\epsilon^2 + \epsilon^2 + \epsilon^2}{3} \right) \dots (د)$$

ومن الموافق تسمية هذه القوانين الثلاثة التي تعطى الحجم حينما تكون الأرض أفقية عرضيا بقانون (هـ) وقانون (و) وقانون (د) للحجم وأكثر هذه القوانين استعمالا في العمل هو قانون (هـ) ولكن على الطالب خصوصا وهو يشتغل بالمسائل العديدة أن لا يقتصر في حسابه على هذا القانون بل يستعمل أيضا أحد القانونين الآخرين وذلك للتحقق من ضبط النتيجة أما القانونان الآخران فربما كان أفضلهما القانون (د) لأنه أخصر قليلا من القانون (و) ويلاحظ أن جمع هذه القوانين هي في الحقيقة قوانين لتعيين مقدار القطاع العرضي المتوسط إذ أن ذلك هو الجزء الوحيد المتعب في العملية إذ يكفي لتعيين الحجم في كل حالة ضرب القطاع العرضي المتوسط في المقدار صـ

وفي جميع المسائل التي ذكرت كان طول القطاع صـ بمقدار بمائة متر إذ لم تظهر ضرورة لادخال أى تغيير في هذا المقاس

وفي حالة حساب الحجم بالقانون (د) يمكن بالطبع وضع الكمية

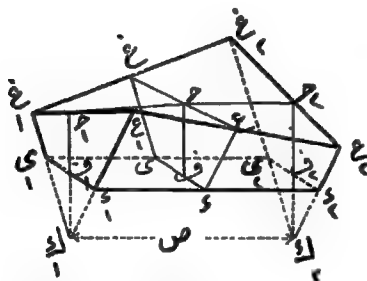
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \quad \text{بالصورة} \quad \frac{(1+2+2)}{3} - \frac{2}{3} \quad \text{أو بالصورة}$$

العددي كما ذكرتم. في حالة استعمال القانون (هـ) ومثل ذلك يسرى أيضا في حالة تقدير الحجم بواسطة القانون (و)

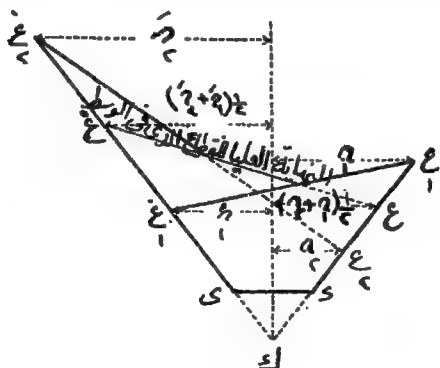
١٥٧ - إيجاد حجم جزء منشوري طوله صـ والارتفاع المتوسط لقطاعيه المتطرفين هـ ٦ هـ وميل الأرض مـ من جانب ٦ مـ من الجانب الآخر ولكن خط الميل لا يقطع القاعدة

ملحوظة ) إذا كان ميل الأرض من أحد الجانبين مضادا لميلها من الجانب الآخر كما في الشكل فيجب أن يكون أحد مقداري مـ سالبا

فإذا كان الشكل في الحقيقة منشوريا فإن الضلعين ع، غ، كاغ، غ، للجانبين يكونان خطين مستقيمين والقطاعات العرضية المكبرة تكون جميعها مثلثات وعلى هذا الفرض يكون نصفاً عرض القطاع الواقع في وسط الطول هما



المتوسطين العددين لنصفى عرض القطاعين المتطرفين كل لنظيره وذلك كما يرى مباشرة من الشكل الاتى الذى هو المنظور الخلقى لجزء الأخدود المحصور بين القطاعين المتطرفين المعلومين





فأفضل قازرن يستعمل في هذه الحالة لتعيين مساحة القطاعات هو  $\frac{د١-د٢}{٢}$  الذى يعطى المساحة بدلالة نصفى العرض

والأفضل في استعمال هذا القانون حساب القطاع المتوسط للجزء المكبر الذى طرفاه  $ع١ ك١$  و  $ع٢ ك٢$  ثم يطرح منه مقدار المساحة الزائدة  $\frac{١}{٢}$  ولنفرض أن  $د١$  و  $د٢$  هما نصفاه عرض أحد القطاعين المتطرفين  $ك١ د١$  و  $ك٢ د٢$  هما نصفاه عرض القطاع المتطرف الآخر وحينئذ يكون

$\frac{١}{٢} (د١ + د٢) \times \frac{١}{٢} (د١ + د٢)$  هما نصفاه عرض القطاع الواقع في وسط الطول

وعلى ذلك تكون مساحة القطاع المكبر المتطرف الأول =  $\frac{د١ د٢}{٢}$

ومساحة القطاع المكبر المتطرف الآخر =  $\frac{د٢ د١}{٢}$

ومساحة القطاع المكبر الواقع في الوسط =  $\frac{(د١ + د٢)(د١ + د٢)}{٤}$

وإذا تكون مساحة القطاع المتوسط

$$\frac{٢}{٢} - \frac{(د١ + د٢)(د١ + د٢) + د١ د٢ + د٢ د١}{٦} =$$

وهذا يمكن كتابته بصورة أخرى هي :

مساحة القطاع المتوسط

$$\frac{٢}{٢} - \frac{(د١ د٢ + د٢ د١) \frac{١}{٢} + د١ د٢ + د٢ د١}{٣} =$$

ويسمى هذا القانون بقانون (د ك د) ويؤول الى القانون (د) اذا كانت الأرض أفقية عرضيا أى حينما تكون د = د

أما مقدار د ك د فيعين بالقانون د =  $\frac{س-س}{س+س}$  ب وفى ذلك ب = س و = ١ + س ه ومقدار د ك د يعين بالقانون د =  $\frac{س}{س+س}$  ب ويحصل على الحجم بضرب القطاع العرضى المتوسط فى المقدار ص وهاك مثلا يوضح طريقة العمل :

$$\left\{ \begin{array}{l} ١٠ + = ١٠ \text{ ه} \\ ١٠ - = ١٠ \text{ ه} \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٢٠ \text{ مترا ك ص} \\ ٢٠ \text{ مترا ك ص} \end{array}$$

ك س = ١ والمطلوب ايجاد القطاع العرضى المتوسط ثم ايجاد الحجم اذا كانت المسافة بين القطاعين المتطرفين ١٠٠ متر

$$ب = ١ + س ه وعلى ذلك ب = ١ = ٣٠ \text{ مترا}$$

$$د = \frac{س}{س-س} \text{ فيكون د} = \frac{١٠٠}{١} \text{ مترا}$$

$$د = \frac{٣٠٠}{١١} \text{ مترا}$$

$$د = \frac{س}{س+س} \text{ وبذلك د} = \frac{٣٠٠}{١١} \text{ مترا}$$

$$د = \frac{١٠٠}{٣} \text{ مترا}$$

$$\text{واذن} \quad د + د = د + د = \frac{٢٠٠٠}{٣٣} \text{ مترا}$$

القطاع العرضى المتوسط

$$\frac{١}{س} = \frac{(١١ + ٢٢ + ٣٣ + ٤٤ + ٥٥)}{٦٠} =$$

$$\text{متر مربع } ٩٠٩,١ = \frac{١٠٠٠}{١١} = \bar{٩} \bar{١}$$

$$\text{» } ٩٠٩,١ = \bar{٩} \bar{٩}$$

$$\text{متر مربع } ٣٦٧٣,١ = \left(\frac{٢٠٠٠}{٣٣}\right)^2 = (\bar{٩} + \bar{١})(\bar{٩} + \bar{١})$$

$$٦ \div ٥٤٩١,١ =$$

$$٩١٥,٢ =$$

$$١٠٠,٠ = \text{اطرح } \bar{٩}$$

$$١ \div ٨١٥,٢ = ١ = \text{اقسم على } \bar{٩}$$

$$\text{متر مربع } ٨١٥,٥٢ = \text{وعلى ذلك فالقطاع المتوسط}$$

$$\text{متر مكعب } ٨١٥١٠ = \text{والجهم}$$

$$\text{ملحوظة - كل من القطاعين المتطرفين } ٨٠٩,١ = ١٠٠ - ٩٠٩,١ \text{ متر مربع}$$

$$\text{والقطاع الواقع في الوسط } ٨١٨,٣ \text{ متر مربع}$$

$$= ١٠٠ - \frac{١}{٤}(٣٦٧٣,١) =$$

١٥٨ - إذا لم يكن ميل الأرض عظيماً جداً أى حينما تكون مركبة بالنسبة الى  $\bar{٩}$  لا يكون الخطأ في القوانين المؤسسة على فرض أن الأرض أفقية عرضياً جسيماً جداً وحينئذ يحدربنا البحث عن مقدار الخطأ الناتج من استعمال هذه القوانين

فللوصول الى ذلك ندخل مقادير  $\bar{٩}$   $\bar{٩}$   $\bar{٩}$   $\bar{٩}$   $\bar{٩}$  بدلالة  $\bar{٩}$  و  $\bar{٩}$  في مقدار القطاع المتوسط المكبرأى

$$\frac{\bar{٩}\bar{٩} + \bar{٩}\bar{٩} + \bar{٩}\bar{٩} + \bar{٩}\bar{٩} + \bar{٩}\bar{٩}}{٢} + \frac{\bar{٩}\bar{٩} + \bar{٩}\bar{٩}}{٢} =$$

٣

وحينئذ يطرح المقدار  $\frac{1}{3}(و_1^2 + و_2^2 + و_3^2)$  من المقدار السابق وهي التي يجب أن تكون مقدار القطاع المتوسط المكبر في حالة ما تكون الأرض أفقية عرضيا ومقدار الزيادة يضرب في صـ ويكون هو المقدار الواجب إضافته للحجم الذي حصل عليه باهمال ميل الأرض لتصحيحه وهذا موضع في البندين الآتيين

١٥٩ - تقدير القطاع المتوسط في الأرض المائلة وذلك بدلالة  $مر ٦ و ١٠$

$$\frac{\eta}{\text{مـ}} - \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{\text{مـ}} = \frac{\text{القطاع المتوسط}}{\text{مـ}}$$

وفي ذلك  $\frac{\text{مـ}}{\text{مـ} - ١} = ١$  و  $\frac{\text{مـ}}{\text{مـ} + ١} = ١$

$$\text{وانا } \frac{1}{2} \frac{و_1^2}{\text{مـ} - ١} + \frac{1}{2} \frac{و_2^2}{\text{مـ} - ١} - \frac{1}{2} \frac{و_1^2}{\text{مـ} + ١} - \frac{1}{2} \frac{و_2^2}{\text{مـ} + ١}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{و_1^2}{\text{مـ} - ١} + \frac{1}{2} \frac{و_2^2}{\text{مـ} - ١} - \frac{1}{2} \frac{و_1^2}{\text{مـ} + ١} - \frac{1}{2} \frac{و_2^2}{\text{مـ} + ١}$$

وصل ذلك يكون القطاع المتوسط مساويا الى

$$\frac{\eta}{\text{مـ}} - \left\{ \frac{1}{2} \frac{و_1^2}{\text{مـ} - ١} + \frac{1}{2} \frac{و_2^2}{\text{مـ} - ١} - \frac{1}{2} \frac{و_1^2}{\text{مـ} + ١} - \frac{1}{2} \frac{و_2^2}{\text{مـ} + ١} \right\}$$

ويسمى هذا القانون بقانون (مر ٦ و)

فاذا كانت الأرض متحدة الميل في الجانبين أى اذا كان  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$  فإن مقدار القطاع المتوسط يؤول الى : -

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}{3} \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

١٦٠ - ايجاد زيادة القطاع المتوسط الحقيقى في الأرض المسألة في حالة حساب ميل الأرض عنه في حالة اهمال حساب ذلك الميل .

يجب أن نطرح من المقدار المذكور للقطاع المتوسط المقدار الآتى : -

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)$$

$$\frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 - \gamma_2} = \gamma_1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 - \gamma_2} \quad \text{وحيث أن}$$

$$\text{وأخيرا} \quad \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2 - \gamma_1} = \gamma_2 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

$$\frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_1)} = \left\{ 1 - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_1)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_1)} \right\} \cdot \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

وعلى ذلك فالزيادة المطلوبة تساوى

$$\frac{\gamma_1^2}{\gamma_1 - \gamma_2} + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{\gamma_3^2}{\gamma_3 - \gamma_1}$$

فإذا كانت النسبة  $س٢$  :  $س١$  صغيرة كما هو الواقع غالباً فيمكن إهمال تلك الزيادة أو اختصارها بالصورة الآتية وذلك بعدم طرح  $س٢$  منها

$$\frac{س٢}{س١} = \left( \frac{١}{س٢} + \frac{١}{س١} - \frac{١}{س١} \right) س٢ + \frac{س٢}{س١} + \frac{س٢}{س١} \cdot \frac{س٢}{س١}$$

وهذا المقدار هو ما يستعمل في جميع الأحوال العادية بشرط أن يكون الشكل منشوريا حقيقة وذلك لأن  $س$  دائماً أكبر بكثير من  $س٢$  في الأشياء العملية .

فإذا كانت الأرض مائلة بالتساوى أى إذا كانت  $س٢ = س١ = س$  فإن مقدار الزيادة يؤول الى : -

$$\frac{س٢}{س١ - س٢} \cdot \left( \frac{س٢}{س١} + \frac{س٢}{س١} + \frac{س٢}{س١} \right)$$

وهكذا يمكن اختصاره غالباً الى : -

$$\frac{س٢}{س١} \cdot \left( \frac{س٢}{س١} + \frac{س٢}{س١} + \frac{س٢}{س١} \right)$$

حساب حجم الحفر في المسئلة المذكورة في البند ١٥٧ باهمال ميل الأرض أولاً ثم بإضافة التصحيح

ففى هذه الحالة  $١ = ١٠$  أمتار  $٦ هـ = ٦ هـ = ٢٠$  متراً  $٦ س = ١$

وعلى ذلك  $١ (هـ + هـ) + س = \frac{س٢}{س١} + \frac{س٢}{س١} + \frac{س٢}{س١}$   $٢ = ١ هـ$

$+ هـ = ٨٠٠$  متر مربع

ولهذه المساحة يجب اضافة الزيادة الناشئة من ميل الأرض



ولكن مثل هذا الفرض قد لا يكون دائما طبق الحقيقة خصوصا في الأحوال التي يلتوى فيها السطح كثيرا لاسيما حينما تكون  $\alpha$   $\beta$  أحدهما سالبا والاخر موجبا كما في المثال المذكور في بند ١٥٧ وبند ١٦٠ ففي مثل هذه الأحوال يجب قياس القطاع الواقع في الوسط وأيضا القطاعين المتطرفين الا اذا كان الميل طفيفا جدا ومن المهم معرفة أى الحالات والى أى درجة يمكن الاعتماد على الحجم المحسوب في حالة عدم قياس القطاع الذى في الوسط ولهذا الفرض سنقارن بين الحجم الذى يحصل عليه بفرض أن الشكل منشورى وبين الحجم الذى يحصل بطريقتين آخريين تستعملان غالبا ومع أن هذا الحجم هو أقل من الحجم الأول الا أن الفرق في كثير من الأحوال طفيف جدا بحيث يهمل ومقدار الفرق هو مقياس الخطأ المحتمل في الحجم المحسوب ومنه يعرف هل هناك ضرورة لقياس القطاع الذى في الوسط أم لا

## ١٦٢ - الطريقة الثانية أو طريقة الأفقى المكافئ في حالة

### ميل الأرض

وهنا طريقة متبعة غالبا وهى حساب الارتفاعات المكبرة  $W_1$   $W_2$   $W_3$  للقطاعات الأفقية التي مساحتها مساوية لمساحة القطاعات المتطرفة المعلومة (أنظر البند ١٥٢ - (٣)) ثم حساب الحجم باستعمال قانون (و)

$$\text{الحجم} = ص \left\{ \frac{W_1}{3} + \frac{W_2}{6} + \frac{W_3}{6} + W_4 \right\} - \frac{W_1}{6}$$

وهذا مماثل لفرض أن مقدار  $W$  في القطاع الذى في الوسط هو المتوسط الحسابى بين مقداريه في القطاعين المتطرفين وهذا الفرض لا يكون حقيقيا مطلقا في الجسم المنشورى الحقيقى الا اذا كان الميل  $(\alpha)$  ثابتا والحجم الذى يعطيه قانون (و) هذا أقل مما تعطيه الطريقة المنشورية اذا كانت  $\alpha$   $\beta$  مختلفتين كما سنرى ولكن في كثير من الأحوال يكون الفرق طفيفا لا يعتد به



ولتتمكن من عمل مقارنة بين قانونى (س ٦ و) ٦ قانون (و) سنبحث كما بحثنا فى الحالة السابقة عن مقدار زيادة القطاع المتوسط الذى يعطيه القانون (و) عن مقدار القطاع المتوسط فيما لو كانت الأرض أفقية عرضيا وتقرن هذه الزيادة بالزيادة فى حالة استعمال قانون (س ٦ و)

والارتباط بين و ٦ وهو و<sup>٢</sup> =  $\frac{س٢ و٢}{س - س٢}$  وعلى ذلك يمكن كتابة مقدار القطاع المتوسط الذى يعطيه قانون و هكذا

$$س٢ - \left\{ \frac{س٢ و٢}{س - س٢} + \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} + \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} \right\} = س٢ - \left\{ \frac{س٢ و٢}{س - س٢} + \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} + \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} \right\}$$

وهذا يخالف قانون (س ٦ و) فى الحد الثالث فقط ويمكن اختصار المقدار الموضوع تحت الجذر بالاتفاق بالحقيقة المعلومة وهى أن س٢ أقل من س هكذا

$$\frac{س٢ و٢}{س - س٢} = \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} \quad \text{إذا أهملنا } س٢$$

$$= \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} = \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} = \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢}$$

$$= \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} = \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} = \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢}$$

$$= ١ + س٢ \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} \quad \text{إذا أهملنا أيضا } س٢$$

فاذا أدخلنا هذا الاختصار وطرحنا من القطاع المتوسط مقداره فى حالة ما اذا

$$\frac{س٢ و٢}{س - س٢} - \left( \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} + \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} + \frac{س٢ و٢}{س٢ - س٢} \right) =$$

$$\left\{ \left( \frac{١}{س٢} + \frac{١}{س٢} \right) س٢ و٢ + \frac{س٢ و٢}{س٢} + \frac{س٢ و٢}{س٢} \right\} =$$

فالذامان الأولان قد اختصرا بعدم طرح الكمية سر<sup>٢</sup> منهما كما تقدم .  
وينتج الحجم في المثال العددي السابق مساويا الى ٨٠٩٠٠ متر مكعب بدلا  
من ٨١٥٠٠ متر مكعب

وقد كانت المساحة الزائدة على فرض أن الشكل منشورى (أنظر بند ١٢٠)  
كما يأتى

$$\left( \left( \frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} \right) \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} \right) \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

وهذا يزيد عن المقدار السابق بالكمية

$$\frac{1}{6} \left( \frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} \right)$$

وينتج من ذلك أن الحجم المحسوب على فرض أن الشكل منشورى يزيد  
عن الحجم المحسوب بالقانون (و) بالكمية

$$\frac{1}{6} \left( \frac{1}{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\frac{1}{4}} \right)$$

وإذا فهذه الكمية هي لحد ما مقياس الخطأ المحتمل في الحجم المحسوب  
فإذا كانت صغيرة بحيث لا يكون لها أثر فإن الحجم يكون واحدا تقريبا إذا  
بحسب أى الطريقتين وعلى الخصوص إذا لم تكن الأرض ملتوية فإن  
الاختلاف يكون صفرا أما إذا كان الاختلاف كبيرا فإن النتيجة تدل على أنه  
كان من الواجب قياس القطاع الذى فى وسط الطول . أما فى حالة عدم  
القياس فربما تكون الطريقة المثل اعتبار التقدير الأصغر للحجم أقرب الى  
الحقيقة من التقدير الأكبر . وذلك لأن الطريقة الثالثة الآتى شرحها بعد

والتي يستعملها المهندسون كثيرا تعطى مقدارا أقل من الطريقتين السابقتين غالبا ولكن ليس في جميع الأحوال .

### ١٦٣ — الطريقة الثالثة في حالة ميل الأرض

هذه الطريقة مبنية على فرض أن الميل سائر بالتدرج من  $\alpha$  الى  $\beta$  أى أن الخط السطحي المتوسط للأرض مستقيم من  $\alpha$  الى  $\beta$  وبناء على ذلك يكون الارتفاع المتوسط للقطاع الواقع في الوسط هو المتوسط الحسابي بين الارتفاعين المتوسطين للقطاعين المتطرفين (وفي كل من الطريقتين السابقتين يكون الارتفاع المتوسط للقطاع الواقع في الوسط أكبر منه في هذه الطريقة إذ أنه أكبر ارتفاع على فرض أن الشكل منشوري) وميل الأرض ( $\alpha$ ) عند القطاع الذى في الوسط يهــر حينئذ المتوسط التوافقي لمقدارى ( $\alpha$ ) في القطاعين المتطرفين (\*) وبذلك يحسب القطاع الذى في الوسط ثم القطاع المتوسط بالطريقة المعتادة أى بقانون سمبسون

$$\text{مساحة القطاع المكبر} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} = r_2^2 - r_1^2 \left( 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)$$

$$= r_2^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \text{ مع ترك قوى } r_1 \text{ الأعلى}$$

من المكعب . أما المساحة المكبرة فتكون  $r_2^2$  لو كانت الأرض أفقية عرضيا وعلى ذلك تكون المساحة الزائدة لهذا القطاع  $\frac{r_2^2 - r_1^2}{2}$

(\*) وهذا يماثل اعتبار شكل سطح الأرض مكافئا زاغيا خطاه الزايمان أحدهما مواز الى  $\alpha$  والثاني عمودى عليه ولا يطل قانون سمبسون الا مقدارا تقر بيا فقط للمجم في هذه الحالة

ومن ذلك تكون المساحة الزائدة للقطاعين المتطرفين  $\frac{2}{3} \frac{3}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{2}$  6 على التناظر والمساحة الزائدة للقطاع الذى فى الوسط تكون بهذه الطريقة

$$\left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{وفى ذلك}$$

$$(2 + 2) \div 2 = 2 \quad \text{وعلى ذلك}$$

وبقانون سمبسون يكون

$$\left\{ \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right\} \frac{2}{3} = \text{متوسط المساحة الزائدة}$$

$$\left\{ \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right\} \frac{2}{3} =$$

وفى المثال العددي المذکور  $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 30$  مترا 6  $\frac{2}{3} = 10$

وعلى ذلك تقول المساحة الزائدة الى  $\frac{2}{3} = 3$  أمتار مربعة والحجم الى

٨٠٣٠٠ متر مكعب بدلا من ٨١٥٠٠ متر مكعب الناتج من الطريقة المنشورة

وبدلا من ٨٠٩٠٠ متر مكعب الناتج من طريقة الأفقى المكافئ أما الفرق

بين أكبر هاتيك الكميات وأصغرها فأقل من  $\frac{1}{4}$  فى المائة والفرق بين

المتوسط والمقدارين المتطرفين  $\frac{2}{3}$  فى المائة وعلى ذلك يكون مقدار الشك

فى حالة قطاع ملتو كهذا كبيرا جدًا فى حالة عدم معرفة ما اذا كنت

الخطوط ح ح أو غ أو غ مستقيمة أم لا فاذا علم ذلك فيجب علينا

معرفة القانون الذى نعلمه عليه والا فيلزم أن نأخذ المقدار المتوسط أى

٨٠٩٠٠٠ متر مكعب ونكتفى بشك قدره  $\frac{2}{3}$  فى المائة ولكن لا شك فى أن

أفضل طريقة هي قياس الارتفاع وميل القطاع الذى فى الوسط حتى يمكن حساب مساحته ومساحة القطاعين المتطرفين وأخذ المتوسط بمقتضى قانون سمبسون

وأما المتوسط المتحصل بهذه الطريقة فهو فى الغالب لا دائماً أقل من المتحصل باحدى الطريقتين السالفتين ولكن الاختلاف بين المقدار الناتج بهذه الطريقة وبين الناتج بالطريقتين الأخرتين ليس بالبساطة التى بين الناتج بالطريقة الأولى والناتج بالطريقة الثانية أما المقدار الذى يزيد به متوسط المساحة التى تعطيها الطريقة الثانية على المتوسط الناتج من هذه الطريقة الثالثة فهو

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ وفى ذلك } \left( \frac{3-1}{3} \right)^2 - \left( \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \right) \left( \frac{3-1}{3} \right)$$

وهذا يمكن الحصول عليه بسهولة نوعاً بالطرح وبترتيب الحدود ويكون اما موجبا أو سالبا وتكون صفرا اذا كانت  $m = 3$  أى حينما يكون سطح الأرض غير مائتو فى الحقيقة فان نتائج الطرق الثلاث تتحدد عند عدم اتواء سطح الأرض

#### ١٦٤ - خلاصة القوانين فى حالة ميل الأرض

نفرض أن مقادير القطاع العرضى المتوسط المتحصلة بالطرق الثلاث السابقة مرموز اليها بالحروف ع<sub>١</sub> ع<sub>٢</sub> ع<sub>٣</sub> على التناظر ونفرض أن المتوسط المتحصل بترك حساب ميل الأرض مرموز اليه بحرف ع

$$\text{ولنفرض أن } ع_1 + ع_2 = ع_3$$

$$6 \quad ع_1 + ع_2 = ع_3$$

$$6 \quad ع_1 + ع_2 = ع_3$$

$$\begin{aligned} & \text{وحينئذ تكون ع} \quad \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{3} \\ & = \frac{\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ & = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ & \text{وفي ذلك و} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 6 \text{ م} \\ & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

وأيضاً بمقتضى البند ١٥٦

$$ع = 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} =$$

وفي ذلك ب = 1 + م هـ

ثم اذ تذكرنا أن م دائماً أكبر بكثير من م تكون

$$\left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$



$$\left\{ \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \right\} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

وحيث أنه يسهل ترتيب الأرقام العنصرية في صفين متوازيين فيكون مقدار  
ع في صف والمقدار الزائد في الصف الآخر ويمكن التأكد من دقة وضبط  
مقدار ع بواسطة قانون (هـ) هكذا

$$ع = \frac{1}{3} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + 1 = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} + 1$$

١٦٦ - إيجاد حجم جزء منشوري طوله ص والارتفاع المتوسط  
لقطاعيه المتطرفين هـ ٦ هـ وخط ميل الأرض قاطع للقاعدة .

كل قطاع عرضي لـ ع ( أنظر بند ١٥٣ ) هو مثلث قاعدته = ١ +  
ص هـ وارتفاعه =  $\frac{1+ص}{ص}$

$$\frac{(1+ص هـ)}{(ص هـ - ١)} = \text{وعلى ذلك مساحة أحد القطاعين المتطرفين}$$

$$\frac{(1+ص هـ)}{(ص هـ - ١)} = \text{ومساحة القطاع المتطرف الآخر}$$

فإذا فرضنا أن رؤوس القطاعين المتطرفين وصلت بعضها إلى بعض  
بالخطوط لا ١ لا ٢ لا ٣ لا ٤ لا ٥ لا ٦ فان قاعدة القطاع العرضي الذي في الوسط  
تكون هي المتوسط الحسابي بين قاعدتي القطاعين المتطرفين وكذا ارتفاع  
ذلك القطاع يكون هو المتوسط الحسابي بين ارتفاعي القطاعين المتطرفين  
ومن هذه الفروض يمكن حساب القطاع العرضي الذي في الوسط وحيث أنه  
بواسطة قانون سمبسون يمكن إيجاد القطاع المتوسط وإذا ضربنا المقدار الأخير  
بالكيفية ص نحصل على الحجم



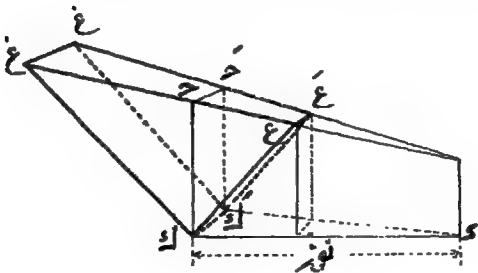
أما اذا فرضنا أن مقدار  $هـ$  في القطاع الذى فى الوسط هو المتوسط الحسابى لمقدارى  $هـ$  فى القطاعين المتطرفين وأن مقدار  $ر$  فى القطاع الذى فى الوسط هو المتوسط التوافقى لمقدارى  $ر$  فى القطاعين المتطرفين فاننا نحصل على مقدار للحجم مخالف لما تقدم الا اذا كان الميل ثابتا فى جميع الأرض

فاذا كان هناك اختلاف كبير بين مقدارى الحجم الناتجين من الطريقتين فان ذلك دليل على وجوب قياس القطاع الذى فى الوسط فى حالة عدم قياس هذا القطاع يجب اعتبار المتوسط بين المجممين المحسوبين أنه أقرب مقدار ممكن للحجم الحقيقى

### ١٦٧ — إيجاد تأثير الانحناء على حجم الحفر

اذا كان الحفر منحنيا وكانت الأرض مائلة ميلا عظيما فانه يجب حساب ذلك فيكون الحجم أكبر أو أصغر مما اذا كان الحفر مستقيما مع اتحاده فى الطول تبعا لجهة الميل بالنسبة للانحناء فاذا كان الجزء الأعلى للحفر خارجا عن الانحناء فان الحجم يكون أكبر واذا كان داخله فان الحجم يكون أصغر مما اذا كان الحفر مستقيما .

فلنفرض أن  $ع غ ك$  هو القطاع المكبر للحفر فى أى نقطة



ولنفرض أن  $ص$  نصف قطر المنحنى  $ك د$   $د$  نصف عرض القطاع  $ك و$  ( $ح ك$ ) الارتفاع المكبر

ولنأخذ قطاعا آخر  $ع غ ك$  قريبا جدا من القطاع الأول وحينئذ يتقاطع القطاعان في خط رأسى مار بمركز منحنى الحفر  $د$

ولنفرض أن  $ص$  هى البعد بين القطاعين في النقطة  $ك$  أو في النقطة  $ح$  أى على طول الخط المنصف للحفر

وحيئذ يكون الجسم المحصور بين  $ع غ ك$   $ك د$   $د ع غ ك$  خابورا ضيقا قطاعه العرضى  $= ع غ ك$  وأضلاعه  $ع ع$   $ك د$   $د ع غ ك$  فيكون حجمه  $= ع غ ك \times \frac{ع ع + ع غ ك + ك د}{3}$

والمفروض الآن أن  $ك ك$   $= ص$  ويرى من السهل أن

$$\frac{ع ع}{ك ك} = \frac{ص - د}{ص} \quad \frac{ع غ ك}{ك ك} = \frac{د - د}{ص} = \frac{د - د}{ص}$$

ومل ذلك  $ع ع = ص (1 - \frac{د}{ص})$   $ك د = ص (1 + \frac{د}{ص})$

ومنه تكون  $\frac{ع ع + ع غ ك + ك د}{3} = ص (1 + \frac{د - د}{ص})$

فيكون حجم القطعة  $= ص (مساحة ع غ ك) (1 + \frac{د - د}{ص})$

فاذا اعتبرت الكمية (مساحة ع غ ك)  $(1 + \frac{د - د}{ص}) - \frac{١}{ص}$

قطاعا عرضيا بدلا من مساحة ع غ ك  $- \frac{١}{ص}$  فيمكن السير في الحساب

كما لو كان الحفر مستقيما

أما الكسر  $\frac{د - د}{ص}$  الذى يصحح القطاع العرضى فيجوز بالطبع أن

يكون موجبا أو سالبا ولكنه في الشكل السابق موجب ويمحوز أيضا أن

وحيث أن  $d = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \approx \frac{r_2}{r_1}$  فينتج من ذلك أن  $d = \frac{r_2}{r_1}$  أو بالتقريب  $\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2}{r_1}$  ومن هنا يكون العامل المصحح  $\frac{r_2}{r_1}$  أو بالتقريب  $\frac{r_2}{r_1}$

۱ = ۵ أمتار 6 = ۱۰ أمتار ۶ = ۷ أمتار

10 = 5 6 10 = 5 6 10 = 5

وفي هذا المثال قد قيست الأبعاد اللازمة في القطاع العرضي الذي في الوسط بحيث لم يبق علينا غير تطبيق قانون سمبسون وسنستخدم قانون (د 6 د) لحساب كل قطاع حيث أن هذا القانون هو الأسهل والأوفق

$$۳۴ = ۲۶۴۰ = ۲۶۳۰ = ۱ + ۳۰ = ۳۱$$

$$\frac{21}{1} = 2 \frac{6}{1} = 2 \frac{20}{1} = 2 \therefore \frac{21}{2-1} = 2$$

$$\frac{r_{t.}}{12} = \sum_r G \frac{z_{.r}}{12} = \sum_r G \frac{r_{.r}}{12} = \sum_r \therefore \frac{u_r}{u+r} = \sum$$

ومن ذلك  $\frac{17}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

∴ تكون العوامل  $\frac{1}{17}$  و  $\frac{1}{9}$  و  $\frac{17}{18}$  أو بالتقريب  $\frac{1}{17}$

فإذا كان الضلع الأعلى من الحفر واقعا داخل الانحناء يجب طرح التصحيح  
وعمل ذلك يكون العمل هكذا

$$\begin{aligned} \bar{1} \bar{1} \bar{1} &= \frac{30000}{32} = 937,5 \text{ التصحيح } 937,8 = 7,8 \dots \left( \frac{1}{120} = \right) \\ \bar{2} \bar{2} \bar{2} &= \frac{20000}{4} = 5000 \text{ التصحيح } 5000,1 = 74,1 \dots \left( \frac{1}{90} = \right) \\ \bar{3} \bar{3} \bar{3} &= 1204,2 \text{ التصحيح } 1204,2 = 12,0 \dots \left( \frac{1}{100} = \right) \end{aligned}$$

93,9

8808,4

93,9

$$6 \div 8714,5 =$$

$$1452,4 =$$

400,0

اطرح ١

$$2 \div 1052,4 = 2 \text{ اقسام على } 2$$

$$526,2 = \text{القطاع المتوسط} \text{ مترا مربعا}$$

أما اذا كان الضلع الأعلى من الحفرة واقما خارج الانحناء فانه يجب اضافة التصحيح وحينئذ تعدل طريقة العمل كما يأتي :

$$\bar{1} \bar{1} \bar{1} + \bar{2} \bar{2} \bar{2} + \bar{3} \bar{3} \bar{3} = 8808,4$$

93,9 =

التصحيحات

$$6 \div 8902,3 =$$

$$1483,7 =$$

400,0

اطرح ١

$$2 \div 1083,7 =$$

$$2 = \text{اقسم على } 2$$

$$541,8 = \text{القطاع المتوسط} \text{ مترا مربعا}$$

(تمرينات ۲۵)

المطلوب إيجاد القطاعات العرضية المتوسطة في الأمثلة التسعة الآتية  
فرض أن الأشكال منشورة تماما

ويجب التأكد من صحة النتيجة بكل مثال بطريقتين مختلفتين . أما عرض القاعدة فهو ٢٠ متراً في كل مثال بحيث يكون  $1 = 10$  أمتار إلا إذا ذكر ما يخالف ذلك

(١) س = ٢ ٦ = ١٠ ٦ = ٢٠ ٦ = ١٠ ٦ = ٥ ٦ = ٥ أمتار

(۲) س = ۱    ۶ = ۵۰    ۶ = ۴۰    ۶ = ۲۰    ۶ = ۲ مترین

(٣) س = ١ ك = ١٠ أمتار ك = ٦ أمتار والأرض أفقية عرضيا

$\frac{1}{2} = 0.5$      $\frac{1}{3} = 0.33$      $\frac{1}{4} = 0.25$     (4)

(۵) س = ۱۶۱ هـ = ۱۲ مئرا ۶ هـ = ۱۶۱ مئرا ۶ هـ = ۱۰ -

(٦) م = ١,٥ هـ = ٦ أمتار هـ = ٠ م  
 ٠ = ١,٥ هـ = ٦ أمتار هـ = ٠ م  
 ٠ = ١,٥ هـ = ٦ أمتار هـ = ٠ م

(أنظر مسألة ١٧)

(٧) س = ١ ٦ ١٠ = ١٠ أمتار ٦ ١٥ = ١٥ مترا ٦ ١٠ = ١٠ أمتار

6 هـ = 2 متر والأرض أفقية عرضيا (أنظر مسألة 12)

(۸) س = ۲ = ۱۰ امتار ۱۵ = ۱۰ مترا ۶ = ۶۰

١٠ = ١ أمتار ٦ = ١ ٦ = ١ ٥٠ = ١

(٩) س = ٠ ٦ = ١ ١٠ أمتار ٦ ١ = ١٥ مترا ٦ ١ = ٥ أمتار

6 هـ = ١٢ مترا والأرض أفقية عرضيا

(١٠) أوجد قانونا لمعرفة القطاع العرضي المتوسط لحفر جوانبه رأسية  
(أى س = ٠)  $6 هـ$   $6 هـ$  هما الارتفاعان المتوسطان لقطاعيه المتطرفين  
 $6 ا$   $6 ا$  نصف عرض قاعدته عند القطاعين المتطرفين والأرض مائلة  
ميلانها

(١١) تأكد من ضبط نتيجة المسألة السابقة باعتبار  $ا = 6 هـ = 6 هـ$

(١٢) المطلوب بيان أنه اذا كان هناك جزء منشورى لحفر وقاعدته بدلا  
من أن تكون ذات عرض ثابت في جميع الطول يختلف عرضها من  $ا$   $٢$   
في أحد القطاعين المتطرفين الى  $٢ ا$  في القطاع المتطرف الآخر مع العلم  
بأن الأرض أفقية عرضيا فان قوانين (هـ)  $6$  (و)  $6$  (د) تشكل  
بالصورة الآتية :

$$\text{صـ} \left( \frac{٢ هـ + ٢ هـ + ٢ هـ}{٣} \text{ سـ} + \frac{(١ + ١)(١ + ١) + ٢ ا + ٢ ا}{٣} \right) \quad \text{(هـ)}$$

$$\text{صـ} \left( \text{سـ} - \frac{٢ ا + ٢ ا + ٢ ا}{٣} - \frac{٢ ا + ٢ ا + ٢ ا}{٣} \right) \quad \text{(و) . . .}$$

$$\text{صـ} \left( \frac{٢ ا + ٢ ا + ٢ ا}{٣} - \frac{٢ ا + ٢ ا + ٢ ا}{٣} \right) \quad \text{(د) . . .}$$

(١٣) المطلوب بيان أن

$$\left( \frac{٢}{٢ - ٢ ا} + \frac{١}{٢ - ٢ ا} \right) \frac{٢ ا}{٢ + ٢ ا} = \frac{٢ ا (٢ - ٢ ا)}{(٢ - ٢ ا) (٢ - ٢ ا)}$$

مع تحليل الكسر على حسب قوى سـ

$$(١٤) \text{المطلوب بيان أن } (٢ - ٢ ا) (٢ - ٢ ا) = ٢ (٢ - ٢ ا) + (٢ - ٢ ا) ٢$$

(١٥) المطلوب بيان أن قانون (س ٦ و) للقطاع المتوسط لشكل منشوري تام يمكن وضعه بالصورة الآتية :

$$\frac{1}{3} - \left( \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \right) (1 + 1) \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \right) \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})} = 6$$

(١٦) المطلوب بيان أنه يمكن وضع قانون الزيادة الناشئة من ميل الأرض بالصورة الآتية

$$\left( \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} (8 + 1) + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \right) \frac{1}{3}$$

$$\frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})} = 8 \quad 6$$

(١٧) المطلوب إيجاد قانون القطاع المتوسط وكذا قانون الزيادة حينما تكون  $\frac{1}{2} = \infty$

(١٨) المطلوب إيجاد قانون القطاع المتوسط وكذا قانون الزيادة حينما تكون  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}$

(١٩) المطلوب إيجاد مقدار الحفر في حالة ما يقطع خط ميل الأرض القاعدة مع العلم بأن  $1 = 10$  أمتار  $6$  سم  $= 1$   $6$  سم  $= 2$  متر  $6$  سم  $= 5$   $6$  سم  $= 0$   $6$  سم  $= 10$  وطول الحفر  $100$  متر

(٢٠) المطلوب إيجاد مقدار الردم في المسألة السابقة .

(٢١) المطلوب إيجاد مقدار الحفر والردم في طول قدره ١٠٠ متر حينما تكون  $هـ = ٢$  متر  $و ٦ = ١$  متر على التناظر في القطاعين المتطرفين  $٦ = س = ١$   $٦ = م = ٥$  في جميع الأرض

(٢٢) المطلوب التأكد من دقة جواب مسألة (٢١) بالاستعانة بمسألة (١٦) من تمرينات (٢٤) صحيفة (٢٣٥)



## الفصل الثامن

### حل المثلثات بواسطة اللوغاريتمات وقواعد مختصرة في الحسابات اللوغاريتمية

١٦٨ — سنفرض في الحلول الآتية أن المعلوم بعض أضلاع المثلث وبعض زواياه وأن الباقي من أضلاعه وزواياه مطلوب إيجادهم ونفرض أن الطالب عالم بالقوانين التي تستعمل في الحسابات والغرض من هذا الفصل بيان أحسن طريقة لتنظيم العمل المشتغل به وبيان طرق لاثقة لتحقيق النتائج التي قد حصل عليها حاسب واحد فإذا اشتغل شخصان بالحساب كل على حدته فلا داعي لمثل هذا التحقيق لأنه ليس هناك طريق للتحقيق أحسن من عمل الحساب مرتين مستقلة. ولا يقتصر سبب هذا على أن من المحقق عملاً أن النتائج المتحصلة إذا كانت متفقة فهي صحيحة بل لأنه في حالة عدم توافق للنتائج فإن مقارنة تفاصيل العمل تظهر محل الاختلاف وبذلك يتيسر التصحيح بأقل تعب

الا أنه في حالة ما يتم العمل عامل واحد من الضروري إيجاد طريقة لتحقيق نتيجته

١٦٩ — فأقول مسألة تختارها هي أن يكون المعلوم الثلاثة الأضلاع والمطلوب إيجاد الثلاث الزوايا فيرى أن هناك طرق تحقيق بسيطة يمكن عملها أثناء العملية زيادة على التحقيق النهائي إلا أنه قبل الدخول في المسألة قد يكون من المفيد أن نبين هنا بعض قواعد مختصرة في أعمال اللوغاريتم على وجه عام فيفرض أن الطالب يعلم كيفية البحث عن لوغاريتم أى عدد ولوغاريتم الجيب وجيب التمام والظل الخ لزائوية وأنه يعلم أن اللوغاريتم

هو ٢ س بحيث أن اللوغاريتمات تتركب على حسب قوانين الأسس فمثلا إذا قلنا أن لو ٢ في الجملة اللوغاريتمية التي أساسها عشرة (أو بالاختصار لو<sub>١٠</sub> ٢) = ٠.٣٠١٠٣.

فمعنى ذلك أن ٣ = ١٠<sup>٠.٣٠١٠٣</sup> وذلك يدل على صحة القضايا الآتية وهي

$$٢٠ = ١٠^{٠.٣٠١٠٣} \quad ١٠ \times ١٠ = ٢٠٠ \quad ١٠^{٠.٣٠١٠٣} \times ١٠^{٠.٣٠١٠٣} = ١٠^{٠.٦٠٢٠٦}$$

$$٠.٢٦ = ١٠^{-٠.٣٠١٠٣} \quad ١٠ \times ١٠^{-٠.٣٠١٠٣} = ١٠^{١-٠.٣٠١٠٣}$$

ويدل أيضا على صحة ما يأتي وهو ٢ = ١٠<sup>٠.٣٠١٠٣</sup>

فمثلا ١٠<sup>٠.٣٠١٠٣</sup> = ٢ أو يساوى بالتقريب ١٠<sup>٠.٣</sup> وذلك أمر سهل التحقيق

$$\text{لأن } ١٠^٠ = ١ \quad ١٠^{٠.٢٤} = ١.٦ \quad ١.٦ \times ١.٦ = ٢.٥٦ \approx ٢$$

#### ١٧٠ - بيان القواعد الخاصة باللوغاريتمات بالاختصار

اللوغاريتم الممتد لأي عدد هو أس القوة لعدد ١٠ الذي يجعله مساويا للعدد المفروض فإذا كان س هو لوغاريتم العدد د فإنه يكون د = ١٠<sup>س</sup>

فإذا ضرب عدنان د = ١٠<sup>٦</sup> م = ١٠<sup>٣</sup> أو قسم أحدهما على

$$\text{الآخر فإنه يكون } د = م \times ١٠^٣$$

$$د \div م = ١٠^٣$$

ومن هنا تنبع القواعد الآتية وهي أنه لضرب عددين يلزم أن يضم لوغاريتماتها ولقسمة عدد على عدد آخر يلزم طرح لوغاريتم الثاني من لوغاريتم الأول

$$\text{أى أن } \text{لو د م} = \text{لو د} + \text{لو م}$$

$$\text{لو } \frac{د}{م} = \text{لو د} - \text{لو م}$$

وبمثل ذلك تنتج القواعد الأخرى الخاصة باللوغاريتمات وهي

$$\text{لود}^{\sim} = \text{س لود} 6 \text{ لو} \sqrt{2} = \frac{1}{\text{س لود}}$$

وإذا نظرنا للعدد البياني أى الجزء الصحيح من اللوغاريتم المعتاد ينبغي أن يلاحظ أنه إذا كان أعلى رقم من العدد فى رتبة الآحاد أى إذا كان العدد محصورا بين ١.٠٦ يكون العدد البياني للوغاريتم صفرا حيث ان اللوغاريتم يكون محصورا بين لوغاريتم ١ 6 لوغاريتم ١٠ أى بين ١ 6٠

وبناء على ذلك وعلى ما هو معلوم من أن الضرب فى ١٠ أو القسمة على ١٠ يزيد أو ينقص اللوغاريتم بقدر واحد صحيح تنتج القاعدة العامة الآتية

ان العدد البياني للوغاريتم أى عدد يساوى رقيا عدد المنازل التى نقل اليها أكبر رقم معنوى للعدد من منزلة الآحاد ويكون موجبا إذا كان أكبر رقم معنوى على يسار رتبة الآحاد وسالبا إذا كان أكبر رقم معنوى على يمين رتبة الآحاد أما الجزء الاعشارى من اللوغاريتم فهو موجب دائما ومقداره غير متعلق بوضع العلامة الاعشارية فى العدد

فمثلا فى العدد ٣١٢١٧,٦٥ يكون أكبر عدد هو ٣ وهو على يسار رقم الآحاد بأربع رتب واذن يكون عدده البياني هو ٤ وهذا اللوغاريتم يساوى ٤,٤٩٤٤٠٠

وفى العدد ٠,٠٠٣١٢١٧٦٥ أكبر رقم معنوى هو فى رابع منزلة على يمين الآحاد واذن يكون العدد البياني للوغاريتم هو - ٤ ويكتب هكذا ٤ واللوغاريتم يساوى ٤,٤٩٤٤٠٠ الذى هو - ٤ + ٤,٤٩٤٤٠٠

لأن العدد يساوى  $10^{-4} \times 3,121765$  فلوغاريتم المعامل الأول هو — ٤ ٦ لوغاريتم المعامل الثانى ٠,٤٩٤٤٠٠

ثم اذا نظرنا الى لوغاريتمات الجيوب وجيوب التمام الخ للزوايا فانه ينبغى أن يلاحظ أنه حيث كان كل من الجيب وجيب التمام أقل من ١ دائما فان العدد اليبائى يكون سالبا على الدوام وبمثل ذلك يكون لو ظاهر سالبا بالنسبة لمقادير المحصورة بين  $0^\circ$  و  $90^\circ$  وأن لوغاريتم ظلها ه سالب اذا كان مقدار ه محصورا بين  $0^\circ$  و  $90^\circ$  ولكن لوغاريتمات القاطع وقاطع التمام موجبة على الدوام

وفى جداول اللوغاريتمات الانكليزية جرت العادة أن يضم ١٠ على اللوغاريتم الحقيقى للجيب وجيب التمام الخ وذلك ليستغنى عن تكرير طبع علامة ناقص أما فى أوروبا فتبع تلك الطريقة غالبا وليس على الدوام واننا نوصى الطالب فى استعمال هذه اللوغاريتمات أن يستعمل اللوغاريتمات الحقيقية على الدوام لا اللوغاريتمات الجداولية غير المضبوطة وبذلك يتخلص من شغل باله على الدوام فى أمر ما اذا كان الواجب أن يضم أو يطرح عشرة أو جملة عشرات وفى هذه الطريقة فائدة أخرى من وجهة حسابية وهى اشتغاله بأمر حقيقى وليس من الضرورى أن يكون أساس اللوغاريتم ١٠ على الدوام فان جميع القوانين ما عدا الخاصة بمقادير العدد اليبائى والجزء الاعشارى تكون صحيحة مهما كان الأساس والتعريف الأسامى هو أنه اذا كان  $س = د$  فان مقدار س يكون هو لوغاريتم د بالنسبة للأساس ح وهذا الازتباط يكتب عادة هكذا

$$س = لو د$$

وهناك نظرية أساسية لا يحتاج اليها الا فى تغيير أساس الجملة اللوغاريتمية وهى الآتية.

لوغاريتم أى عدد بالنسبة لأساس معين هو نسبة لوغاريتم العدد الى  
لوغاريتم الأساس

أى ان  $\frac{\log D}{\log H}$  وفى هذه المتطابقة يمكن أخذ اللوغاريتمات فى الطرف الثانى بأى أساس  
 أريد بشرط أن يكون واحدا فى البسط والمقام  
 ولاشبات ذلك نقول

ليكن  $M = \log D$

فيكون  $H = \log H$

فاذا أخذنا اللوغاريتم لأى أساس فانه يكون

$M \log H = \log D$

ومنه  $\frac{\log D}{\log H} = M$

أى  $\log D = M \log H$

وجميع النظريات الخاصة بتغير الأساس تنتج مباشرة من هذه النظرية  
 الأساسية

### ١٧١ - قسمة اللوغاريتم ذى العدد البياني السالب

فى أثناء العمليات الحسابية قد تدعو الضرورة لقسمة لوغاريتم ذى عدد  
 بياني سالب فيمكن اجراء ذلك بطريقتين والأحسن أن نوضحهما بمثال  
 والطريقة الأولى تختار اذا كانت القسمة على عدد صحيح بسيط والطريقة  
 الثانية تكون ضرورية اذا كان المقسوم عليه كسرا أعشاريا أو عددا مشتملا  
 على كثير من الأرقام

مثلا ليكن المطلوب قسمة  $٣٦٥١٨٢\bar{٤}$  على ٥

الطريقة الأولى — نلاحظ أن  $٣٦٥١٨٢\bar{٤} = ٣٦٥١٨٢ + ٥ -$  واذن فبقسمة  $\bar{٤}$  على ٥ يكون خارج القسمة  $\bar{٤}$  والباقي ١ ثم إن ما بقى من العملية هو كالقسمة العادية ويكون الناتج هو  $٧٣٠٣٦\bar{٨}$ .

والنقطة المهمة اللازم الالتفات إليها بوجه خاص هي أنه في قسمة العدد اليائى يجب أن يكون خارج القسمة كبيرا كبيرا كافيا لكي يكون الباقي موجبا

الطريقة الثانية — نكتب عدد  $٣٦٥١٨٢\bar{٤}$  بالصورة المكافئة له وهي  $٣٦٥١٨٢ + \frac{٤}{٥}$  ثم نجرى عملية القسمة المعتادة فيكون خارج القسمة  $٧٣٠٣٦ + \frac{٤}{٥}$  ثم يكتب خارج القسمة نهائيا بحيث يكون الجزء الاشارى موجبا أى يكون  $٧٣٠٣٦\bar{٨}$  كما تقدم (أنظر أيضا بند ١٧٦)

وقد وضعنا هنا قليلا من الأمثلة للتمرين على اللوغاريتم قبل الدخول في حل  
المثلثات

### تمارينات (٢٦)

- (١) المطلوب إيجاد  $\sin^{-1} ٣,١٤١٦$
- (٢) المطلوب إيجاد  $\sin^{-1} ٠,٠٠٣١٤١٦$
- (٣) المطلوب إيجاد  $\sin^{-1} ٠,٠٠٣١٤١٦ = \sin^{-1} ٠,٠٠٣١٤١٦$
- (٤) المطلوب إيجاد لوط حينما يكون  $\sin^{-1} ٠,٠٠٣١٤١٦ = ٠,٠٠٣١٤١٦$

$$(٥) \text{ المطلوب إيجاد مقدار } \frac{\frac{1}{V}(\pm ٢٧) \times \frac{3}{V}(-٠,٠٠٣٢٦)}{\frac{1}{5}(١١,١٨٦٤)}$$

- (٦) المطلوب إيجاد العدد الذى لوغاريتمه المعتاد هو — (٢,٦)
- (٧) المطلوب إيجاد الجذر السابع للعدد ٠,٣٦٨٥٤٢ بواسطة اللوغاريتم
- (٨) المطلوب إيجاد لو ١٥٣,٤٥ (ومقدار هـ كما فى مسألة ٤)
- (٩) المطلوب إيجاد لو ١١٦,٢٥٣
- (١٠) المطلوب إيجاد سـ من المعادلة
- $$٧١ س = ظا ١٦ - ٣٥ حا ٣٠ - ١٨ - ٤٢$$
- (١١) المطلوب إيجاد سـ من المعادلة
- سـ ط = هـ (أنظر المسألة الرابعة)
- (١٢) المطلوب إيجاد سـ من المعادلة
- $$٢ س = ظا ١٥ - ٢٣ جتا ٩٥ - ٤٢ - ٤٠$$
- (١٣) المطلوب إيجاد سـ من المعادلة
- (جتا ١) س = جا ١ ومقدار ١ = ٣٧ ٢٨,٣ - ٤
- (١٤) المطلوب تقدير
- $$\frac{٢}{٣} ب - \frac{٥}{٦} (ب + ١) - \frac{٧}{٤} (ب - ١) - \frac{١}{٥} حينا يكون$$
- $$٢,٧١٨٢٨ = ب \quad ٣,١٤١٥٩ = ١$$
- (١٥) المطلوب تقدير الكمية فى المثال السابق حينا يكون
- $$٠,٣١٤١٥٩ = ١ \quad ٢,٧١٨٢٨ = ب$$
- (١٦) اذا كان لوغاريتم عدد بالنسبة للأساس ٤ هو ٠,٣٥١٨٤ فما  
لوغاريتم هذا العدد بالنسبة للأساس ٨

$$(١٧) \frac{\frac{1}{3} \left( \frac{120}{1} \right) \times \frac{3}{4} (٠,٠٠٧١٤)}{\frac{1}{4} (٣,٧١٢٤)}$$

$$(١٨) \text{ المطلوب إيجاد مقدار } \text{سم} \text{ إذا كان } \text{سم}^2 = ٥$$

$$(١٩) \text{ المطلوب إيجاد مقدار } \text{سم} \text{ من المعادلة } \sqrt[٧]{\left( \frac{٧٤٢١}{٥٢١} \right)} = \text{سم}^٧,٢$$

$$(٢٠) \text{ المطلوب إيجاد مقدار } \text{سم} \text{ من المعادلة}$$

$$٢ = \frac{1}{\text{سم}} \left( \frac{٣٣٧}{٦٤٦٨٨٥} \right)$$

$$(٢١) \text{ المطلوب اثبات أن لو } ١ \times \text{لو } ١ = ١ \text{ وأن لو } ١ = ١$$

$$(٢٢) \text{ المطلوب اثبات أن لو } ١ = ٠ \text{ لو } ٠ = ٠ \text{ لو } ٠ = ٠ \text{ وفي الحالة}$$

الآخيرة يلزم أن يكون مقدار ١ أكبر من الواحد

$$١٠٧٢ - \text{المطلوب إيجاد زوايا المثلث } \text{ب} \text{ ح إذا علمت الأضلاع}$$

الثلاثة ١ ٦ ٦ ح فالقوانين التي تستعمل للحل هي

$$\text{طا } \frac{1}{3} = \frac{\text{سم}^٣}{١ - \text{سم}} \text{ الخ وفي هذا القانون}$$

$$\text{سم} = ٧ (١ - \text{سم}) (١ - \text{سم}) (١ - \text{سم}) : (١ - \text{سم} - \text{سم}) \div \text{سم}$$

والأحسن أن يكون ترتيب العمل حسب المثال الآتي (واللوغازيمات

ذات ستة أرقام أعشارية مأخوذة من جدول برميكر السهل الاستعمال وفي

هذه الجدول بيئت الزوايا من ١٠ ثوان إلى ١٠٠ ثوان وهذا يجعل الأجزاء

النسبية بسيطة جدا



مثال  
حساب الزبا اذا كانت الاضلاع الثلاثة معلومة

$\begin{aligned} 1144479,1 &= 1 \\ 110139,7 &= 1 \\ 535251,3 &= 5 \\ 1800000 &= 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 57274,20 &= 1 \\ 23198 &= 1 \\ 21512507 &= 2 \\ 900000 &= 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 14044/4 &= 1 \\ 399180/4 &= 1 \\ 170149/4 &= 1 \\ 1881290 &= 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 505230 &= 1 \\ 1787844 &= 1 \\ 173310 &= 1 \\ 3440119 &= 1 \\ 1881292 &= 1 \\ 1558729 &= 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 113723 &= 1 \\ 1180830 &= 1 \\ 1798822 &= 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 731422 &= 1 \\ 157784 &= 1 \\ 1591422 &= 1 \\ 1539644 &= 1 \end{aligned}$
--	---	--	--	---	--

وفي العمل ليس من الضروري توضيح نوع الكميات واذ فيمكن اختصار الحساب هكذا

[illegible]

وهي معادلة تيسر للطلاب أن يحققوها بنفسه وبذلك تحقق جميع الأعمال الحسابية التي أجريت إلا أنه لا يحقق اللزوميات بل تنحصر فائدة هذا التحقيق في معرفة موضع الخطأ ان موجودا وذلك الخطأ يمكن معرفته من العمود التالي الذي فيه مقادير  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{7}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$  مستخرجة من

واذن فيجب النظر الى الفائدة الخاصة لتحقيق الموضحة في العمود الرابع

فاللزم النظر فيها هي أين موضع الخطأ .

فإذا تبين من فحص العمود الرابع أنه مضبوط فإن هناك أمرين فقط يحتمل أن يشتملا على الخطأ أحدهما في استخراج لوغاريتم ظل الزوايا من جدول اللوغاريتمات (بأن يأخذ الحاسب لوغاريتم الجيب حيث يريد أخذ لوغاريتم الظل وهذا خطأ كثير الوقوع من المبتدئين) والموضع الآخر الذي يحتمل أن يشتمل على الخطأ هو في لوغاريتم  $\text{س} - \text{ا} \text{س} - \text{ب} \text{س} - \text{ج} \text{س}$  وإذا كان الأمر على خلاف ما ذكر أي إذا كان فحص العمود الرابع قد أدى إلى نتيجة غير مرضية فهذا يدل على أنه قد وقع خطأ في عملية الجمع أو الطرح أو القسمة على ٢ فيجب تصحيح هذا الخطأ ثم يبحث عن لوغاريتم ظلال الزوايا بدلالة الأرقام الصحيحة .

وهناك أمران ثانويان واضحان من أنفسهما أولهما أنه في نهاية عملية حساب مقدار  $\pi$  يلاحظ مقدار  $\frac{1}{4}$  وهذا المقدار يلزم وضعه هكذا ولا يوضع كسراً أعشارياً في المترلة السابعة الاعشارية لأن ذلك قد يؤدي الى الارتباك والأمر الثاني استعمال اللوغاريتم الحقيقي للظل ولذا يجب لاستخراجه من جدول اللوغاريتم اضافة ١٠ عليه عقلياً .

وأكبر صعوبة يلاقها المبتدئ هي على ما يظهر إيجاد المقدار الصحيح للأجزاء النسبية فإن الغالب أن لا توجد تلك المقادير بالضبط انام ولذا تستغرق زمنا طويلا في استخراجها مع أنه لا ضرورة لذلك اذا اتبعت في استخراجها طريقة مضبوطة .

فاذا استعمل جدول اللوغاريتم ذى الستة أرقام الاشارية عمل برميكر فان الأجزاء النسبية يجب أن تحسب حسابا عقليا دائما ويصير هذا سهلا جدا وسريعا بقليل من التمرين وهذه السرعة لا يمكن الحصول عليها أصلا اذا حسبت جميع الأجزاء النسبية الصغيرة على الورق دائما .

ويمكن الاحتراس من الخطأ الجسيم في الأجزاء النسبية بأن يلاحظ الطالب دائما أن اللوغاريتم المبحوث عنه يكون محصورا بين لوغاريتمين متوالين في الجدول فاذا احتسب الطالب هذا الاحتراس فانه لا ينسى أن الأجزاء النسبية في لوغاريتم جيب التمام ولوغاريتم ظل التمام سالبة على الدوام ويكون خطر وقوع الخطأ من الحاسب غير ممكن الحصول لأنه يترتب عليه أن يكون اللوغاريتم بعيدا عن الحقيقة أكثر من بعده عنها لو حذف الأجزاء النسبية بالكلية .

ولأجل تتمم الحل اللازم للثلاث المفروض يلزم أن تضعف أنصاف الزوايا ثم يعمل التصحيح الجزئى الضرورى لجعل مجموع الزوايا ١٨٠° ويوزع بالتساوى على الزوايا على قدر الامكان فاذا لم يمكن توزيعه بالتساوى فالأصوب أن يكون التصحيح في الزوايا الكبرى لا فى الصغرى والنتيجة المصححة مبينة فى العمود السادس .

١٧٣ — المطلوب حل المثلث ٦ ب حـ المعلوم قاعدته ١ وزوايا قاعدته ب ٦ حـ

فالقوانين هي  $\frac{1}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  أو يكتب باختصار  
هكذا  $\frac{1}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  وفي هذا القانون ك رمز لأي ضلع ك ك رمز  
للزاوية المقابلة له .

فتعين زاوية ٦ أولا بأن يلاحظ أن مقدارها إذا ضم على ب + ح  
فالمجموع يساوي ١٨٠° (أنظر بند ١٧٧) ثم يعين مقدار لو ٢ من القانون  
 $\frac{1}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  ثم يعين ب ك ح أخيرا من القانونين  $\frac{1}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$   
 $\frac{1}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

وهناك أوفق ترتيب للعمل .

مثال

الحساب حينما يعلم ضلع وزاويتان مجاورتان له .

لو ١ = ٢,٤٣٨٣٢٣	١ = ٢٧٤,٣٦١
لو ح ٦ = ١,٨٩٣٦٢٠	٦ = ٥٢,٣٠,٤٥,٢
لو ٢ = ٢,٥٤٤٧٠٣	ب = ٤٧, ١٥, ٢٢, ٧
لو ح ٦ = ١,٨٦٥٩٣١	ح = ٨١, ١٣, ٥٢, ١
لو ح ٦ = ١,٩٩٤٨٩٤	١٨٠, ٠٠, ٠٠, ٠ =
لو ب = ٢,٤١٠٦٣٤	٢٥٧, ٤١٥ = ب
لو ح = ٢,٥٣٩٥٩٧	٣٤٦, ٤١٥ = ح

أو يكتب مقدار لو ٢ من مرة ثانية إذا أريد ويكتب لو ح ٦ تحت  
الأولى ولو ح ٦ تحت الثانية وذلك لايجاد لو ب ك لو ح بالجمع الآن الوضع  
المبين بهذا أكثر اختصارا وفيه مزية الاستغناء عن تكرار كتابة لو ٢

ويمكن اتباع الترتيب السابق حينما يكون المعلوم ضلعًا وزاويتين أيا كانا

ولأجل التحقق من صحة النتيجة يمكن استعمال القانون  $\hat{c} - \hat{b} = \hat{a}$   
 $\hat{a} = \hat{b} - \hat{c}$  أو هذا القانون العام وهو  
 $\hat{c} - \hat{a} = \hat{b}$   $\hat{a} = \hat{b} - \hat{c}$  (ص - ع)

وفي هذا القانون ص - ع هما أكبر الأضلاع والزوايا ع - ع هما أصغرهما ومن السهل البرهنة على صحة هذا القانون ومن الواضح أنه صحيح سواء كان كل من ص - ع هما أكبر الأضلاع وأصغرهما على التناظر أم لا ولكن هذا القانون نافع جدًا للتحقيق إذا انتخب هذان الضلعان ولأجل استعماله يجب أولاً حساب مقدارى ص + ع - ع ثم يبحث عن لوغاريتميهما ويضمان الى بعضهما فينتج لو (ص - ع) ثم يبحث عن لوغاريتم الكمية التى فى الطرف الثانى أيضاً فاللوغاريتم الجديد الذى يدخل هنا هو لو ح (ص - ع) فإذا كان اللوغاريتمان متساويين فالعمل صحيح ما لم تكن بعض المقادير المعلومة قد وضعت غلطاً أو حصل غلط فى الارتباط بين ك - ع لو ك فهنا يكون

$\begin{array}{r} \hat{c} - \hat{b} = \hat{a} \\ 93358294 \\ \hline 1,747279 = (\hat{b} - \hat{c}) \text{ لو ح} \\ 2,044703 = \hat{a} \text{ لو} \\ 2,438323 = \hat{b} \text{ لو} \\ \hline 4,730305 \end{array}$	$\begin{array}{r} \hat{b} + \hat{c} = \hat{a} \\ 603,830 \\ \hline 89,000 = \hat{b} - \hat{c} \\ \text{و} (\hat{b} + \hat{c}) = 2,780915 \\ \text{و} (\hat{b} - \hat{c}) = 1,949390 \\ \hline 4,730305 \end{array}$
---	---

١٧٤ - حل المثلث  $\hat{a} - \hat{b} - \hat{c}$  المعلوم منه ضلعان  $\hat{a}$  و  $\hat{b}$  والزاوية  $\hat{c}$  المقابلة لأحدهما .

فقانون الحل هو  $\kappa = ٢$  بى حـ  $\kappa$  كما فى الحالة السابقة تماما الا أن تفاصيل العمل فى الحل مختلفة فأقول ما يعمل هو إيجاد لـ  $٢$  بى من القانون  $٢$  بى =  $١$  بـ حـ  $١$  ثم يعين لوحـ  $١$  من القانون حـ  $١$  بـ =  $٢$  بى ومقدار لوحـ  $١$  يعطى مقدارين للزاوية  $١$  بـ أولها زاوية حادة نرمز لها بالرمز  $١$  بـ والثانية مكملتها ( $١$  بـ) وذلك لأن جيب أى زاوية هو نفسه جيب مكملتها ولو غار يتمه كذلك أما الزاوية الثالثة حـ فهى التى تتكلم مع الزاويتين الآخرين  $١٨٠^\circ$  فبعد إيجاد هذه الزاوية يمكن حساب الضلع الثالث من المعادلة  $\kappa = ٢$  بى حـ  $\kappa$  وحيث أن هناك مقدارين للزاوية  $١$  بـ فيلزم أن يكون هناك مقداران للزاوية حـ ( $١$  بـ  $١$   $٢$ ) وتبعاً لذلك مقداران للضلع حـ ( $١$  بـ  $١$   $٢$ ) أى أنه يمكن أن يكون هناك مثلثان مشتملان على الأجزاء المعلومة  $١$  بـ  $١$   $٢$  وأما يوجد هذان المثلثان إذا كان  $١$  بـ +  $١$  بـ أصغر من  $١٨٠^\circ$  ولكن لا يكون الأمر كذلك إذا كان  $١$  بـ +  $١$  بـ أكبر من  $١٨٠^\circ$  ومن السهل مشاهدة أن الحلين إنما يوجدان إذا كانت زاوية  $١$  بـ حادة والفرع  $١$  المقابل لهذه الزاوية أصغر من الضلع  $١$  بـ لأن  $١$  بـ =  $١$  بـ +  $١$  بـ  $١٨٠^\circ$  -  $١$  بـ =  $١٨٠^\circ$  + ( $١$  بـ -  $١$  بـ) وهذا المقدار أقل من  $١٨٠^\circ$  إذا كان  $١$  بـ أصغر من  $١$  بـ أى إذا كانت الزاوية  $١$  بـ حادة والضلع  $١$  أقل من الضلع  $١$  وهذه الحالة التى لها حلان تسمى بالحالة المتنبسة .

وينبغى أن يلاحظ أنه حينما يكون  $١$  بـ أصغر من  $١$  بـ (نفرض أن زاوية  $١$  بـ حادة) قد يكون المثلث مستحيلا<sup>(١)</sup> وقد يكون مثلث قائم الزاوية فى  $١$  بـ أى أن الحلين قد يكونان مستحيلين وقد يتحدان

(١) إذا كانت زاوية  $١$  بـ قائمة أو مفرجة فإن المثلث يجب أن يكون مستحيلا إلا إذا كان  $١$  بـ أكبر من  $١$  بـ ولا يمكن أبداً أن يكون هناك حلان فى هذه الحالة

فان كان مقدار لوحات موجبا فالمثلث مستحيل أما اذا كان مقدار لوحات يساوى صفرا فالمثلث قائم الزاوية وهاتان الحالتان تميزان بمقارنة النسبة بين  $\alpha$  :  $\beta$  بمقدار جيب الزاوية  $\alpha$

$$\text{لأن حات } \alpha = \frac{\beta}{\sin \alpha} = \frac{\beta}{\sin \alpha} = \frac{\beta}{\sin \alpha}$$

وطيه اذا كان  $\frac{\beta}{\sin \alpha} = \alpha$  يكون حات  $\alpha = \beta$   $90^\circ$

واذا كان  $\frac{\beta}{\sin \alpha} < \alpha$  أقل من  $\alpha$  يكون حات  $\alpha$  أكبر من الواحد ويكون المثلث مستحيلا

ومن هنا يستنتج أخيرا (بفرض أن  $\alpha$  زاوية حادة) .

اذا كان  $\frac{\beta}{\sin \alpha} > \alpha$  أكبر من الواحد أو مساويا للواحد فلا يكون هناك سوى مثلث واحد

واذا كان  $\frac{\beta}{\sin \alpha} < \alpha$  أصغر من الواحد ولكنه أكبر من حات  $\alpha$  فيكون هناك مثلثان كل منها مشتمل على الأجزاء المعلومة  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$

واذا كان  $\frac{\beta}{\sin \alpha} = \alpha$  فالمثلثان يتحدان وتكون زاوية  $\beta$  قائمة

واذا كان  $\frac{\beta}{\sin \alpha} < \alpha$  أصغر من حات  $\alpha$  يكون المثلث مستحيلا

ويجب على الطالب أن يرسم جميع هذه الأحوال رسما هندسيا

وقبل الدخول في أسئلة رقمية سنبين ارتباطا مهما بين  $\alpha$   $\beta$  وبين

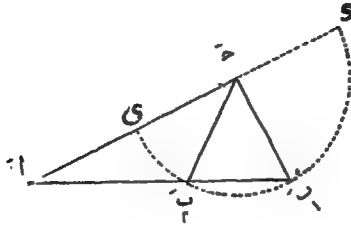
مقدارى الضلع الثالث  $\gamma$   $\beta$  في الحالة المتناسبة

فلنفرض أن حات  $\alpha = \beta = \gamma$  ونرسم دائرة مركزها حات

ونصف قطرها =  $\alpha$  فنقطع الخط  $\alpha$  في  $\beta$   $\gamma$  ونقطع  $\alpha$  حات في  $\gamma$

$$\gamma = \beta = \alpha \quad \beta = \gamma = \alpha$$





واذن يكون

$$\begin{aligned} \frac{ا}{ب} \cdot \frac{ز}{ر} &= \frac{ا}{ب} \cdot \frac{س}{ر} = \frac{ا}{ر} \cdot \frac{س}{ب} \\ \frac{ا}{ب} - \frac{ز}{ر} &= \end{aligned}$$

وستستعمل هذا الارتباط لتحقيق العمل في الحالة المتبسة أما في غير الحالة المتبسة المذكورة فلستعمل التحقيق السابق وهو

$$ص - ع' = ٢ = ٢ ح (ص - ع')$$

مثال

حالة غير متبسة

٢,٥٦٩٦٧٦ = لو ب	٣٧١,٢٥٨ = ب	
٢,٩٥٢٠١٧ = لو ٢ ب	٥٤٢,١٢٦ = ا	
١,٦١٧٦٥٩ = لو ح ا	٣٧١٥٤٢,٣ = ا	
٣٧١٥٤٢,٣ = ا	٢٩٥١٠١٧ = لو ٢ ب	
٢٤ ٢٩ ٤٥,٢ = ب	١,٩٤٤٩٥٣ = لو ح ا	
١١٨ ١٤ ٣٢,٥ = ح	٢,٨٩٦٩٧٠ = لو ب	
١٨٠ ٠٠ ٠٠٠	٧٨٨,٨٠٦ = ح	

## التحقيق

		$788,806 = ح$
		$371,258 = ب$
		<hr/>
		$11,60,064 = ب + ح$
		$0.417,548 = ب - ح$
		<hr/>
		$3,064,482 = (ب + ح) لو$
		$2,620,706 = (ب - ح) لو$
		<hr/>
		$5,685,188$
$93,44,47,3 = ح - ب$		
<hr/>		
$1,999,071 = (ب - ح) لو$		
$2,952,017 =$	لو ٢	
$2,734,100 =$	لو ١	
<hr/>		
$5,685,188$		

وفي هذا العمل ينبغي أن يلاحظ أنه يجب البدء بإيجاد زاويتي ب ك ح  
كما هو مبين في العمود الأخير ثم يحسب مقدار ح ويبحث عن مقدار لو ح ح  
ويوضع تحت لو ٢ في العمود الثاني لأن هذين المقدارين يجب أن يضم  
أحدهما إلى الثاني لإيجاد مقدار لو ح

وأسهل طريقة لإيجاد مقدار لو ح ح حينما يكون ح أكبر من ٩٠  
هي أن يطرح من ح عقليا ٩٠ ويبحث عن لو غار يتم جيب تمام الزاوية  
الباقية التي هي في هذه الحالة ٣٢,٥ ١٤ ٢٨ (مع الملاحظة أثناء البحث  
بأن الأجزاء النسبية سالبة) وبمثل ذلك يكون لو ح (ح - ب) المحتاج إليه  
في التحقيق مساويا إلى لو ح ٩٣ ٤٤ ٤٧,٣

# مثال

## الحالة المتوسطة

$\begin{array}{l} 947^{-10} 423 = 7 \\ 117 \ 01 \ 273 = 7 \\ 0.24 \ 02 \ 0.04 = 7 \\ 180 \dots = 7 \\ 257,986 = 7 \end{array}$	$\begin{array}{l} 3734100 = 7 \\ 2787093 = 7 \\ 944600 = 7 \\ 947^{-10} 423 = 7 \\ 62 \ 8 \ 273 = 7 \\ 80 \ 20 \ 400 = 7 \\ 180 \dots = 7 \\ 60444 = 7 \end{array}$	$\begin{array}{l} 2569176 = 7 \\ 1782083 = 7 \\ 2787093 = 7 \\ 944600 = 7 \\ 944612 = 7 \\ 172400 = 7 \\ 2781716 = 7 \\ 241046 = 7 \\ 2019312 = 7 \end{array}$	$\begin{array}{l} 042,121 = 7 \\ 271,208 = 7 \\ 947^{-10} 423 = 7 \\ 912,284 = 7 \\ 170,818 = 7 \\ 170,818 = 7 \\ 2781716 = 7 \\ 241046 = 7 \\ 2019312 = 7 \end{array}$
--	---	--	---

١٧٥ - المطلوب حل مثلث معلوم منه ضلعان ب ٦ ح ٥ والزاوية المحصورة بينهما <sup>١</sup>

ففي العمل بغير استعمال اللوغاريتم يكون القانون الذى يعين ا هو

$$٢١ = ب٢ + ح٢ - ٢ ب ح جتا ا$$

وبعد ذلك تعين الزوايا المجهولة بالقانون

$$ك = ٢ ب ح حا ك$$

ولكن اذا أريد العمل بواسطة اللوغاريتم فالتقوانين هي قوانين خاصة

مستنبطة من القانون  $ك = ٢ ب ح حا ك$  كما يأتى

$$\frac{ب - ح}{ب + ح} = \frac{ح ا - ح ا ح}{ح ا + ح ا ح} = \frac{٢ جتا ا - ٢ جتا ا}{٢ جتا ا + ٢ جتا ا} = \frac{٢ جتا ا - ٢ جتا ا}{٢ جتا ا + ٢ جتا ا}$$

$$\frac{٢ جتا ا - ٢ جتا ا}{٢ جتا ا + ٢ جتا ا} = \frac{٢ جتا ا - ٢ جتا ا}{٢ جتا ا + ٢ جتا ا} = \frac{٢ جتا ا - ٢ جتا ا}{٢ جتا ا + ٢ جتا ا}$$

$$(١) \dots \dots \dots \frac{ب - ح}{ب + ح} = \frac{٢ جتا ا - ٢ جتا ا}{٢ جتا ا + ٢ جتا ا}$$

$$(٢) \dots \dots \dots (٢ - ١) = ١$$

$$٩٠ = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}$$

هي قوانين العمل ما

مثال

الحساب حينما يعلم ضلالت والزاوية المحسوسة بينهما

$$\begin{aligned}
 ٢٣٣٣,٢٨ &= ب \\
 ٣٥٢٨,٤٣ &= ح \\
 ١٧٢٨,٤ &= ا \\
 ٤٣,٦ &= ب' \\
 ٤١,٤٨ &= ح'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ٣٧٤,٨٥ &= ب - ح \\
 ١٠٨٣١,٧١ &= ب + ح \\
 ٤٤,٢ &= ا - ب \\
 ١٥٨ &= (ب' + ح') \\
 ٢٧٨ &= (ح' - ر')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ٣٧٤,٨٥ &= ب - ح \\
 ١٠٨٣١,٧١ &= ب + ح \\
 ٤٤,٢ &= ا - ب \\
 ١٥٨ &= (ب' + ح') \\
 ٢٧٨ &= (ح' - ر')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ٣٧٤,٨٥ &= ب \\
 ٣٥٢٨,٤٣ &= ح \\
 ١٧٢٨,٤ &= ا \\
 ٤٣,٦ &= ب' \\
 ٤١,٤٨ &= ح'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ٣٧٤,٨٥ &= ب \\
 ٣٥٢٨,٤٣ &= ح \\
 ١٧٢٨,٤ &= ا \\
 ٤٣,٦ &= ب' \\
 ٤١,٤٨ &= ح'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ٣٧٤,٨٥ &= ب \\
 ٣٥٢٨,٤٣ &= ح \\
 ١٧٢٨,٤ &= ا \\
 ٤٣,٦ &= ب' \\
 ٤١,٤٨ &= ح'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ٣٧٤,٨٥ &= ب \\
 ٣٥٢٨,٤٣ &= ح \\
 ١٧٢٨,٤ &= ا \\
 ٤٣,٦ &= ب' \\
 ٤١,٤٨ &= ح'
 \end{aligned}$$

ولأجل الاسراع في هذا العمل يلزم أن يشتغل بالعمود الثالث والرابع معا فعند استخراج لو ظلنا  $\frac{1}{4}$  أ الذي يوضع في العمود الثالث يلزم أيضا إيجاد لو حـ  $\frac{1}{4}$  أ اللازم وضعه في العمود الرابع حيث يكون كتاب جدول اللوغاريتم مفتوحا في المحل المطلوب وعند البحث  $\frac{1}{4}$  (ب - ح -) من لو غاريتم الظل ووضع الناتج تحت  $\frac{1}{4}$  (ب + ح -) في العمود الثاني يلزم أن نبحث أيضا عن مقدار لو قـ  $\frac{1}{4}$  (ب - ح -) لأجل العمود الرابع

ويحصل على مقدار بـ بإضافة  $\frac{1}{4}$  (ب - ح -) الى  $\frac{1}{4}$  (ب + ح -) ويحصل على حـ بطرح  $\frac{1}{4}$  (ب - ح -) من  $\frac{1}{4}$  (ب + ح -) فإذا وضعت مقداري بـ و حـ تحت أ فيمكن تحقيق العمل تحقيقا جريئا بجمع الزوايا الثلاث الى بعضها وهذا إنما هو امتحان جزئي جدا فيحقق صحة تصنيف الزاوية أ وصحة تكوين  $\frac{1}{4}$  (ب + ح -) وصحة الجمع والطرح لمقادير  $\frac{1}{4}$  (ب + ح -) و حـ  $\frac{1}{4}$  (ب - ح -) ليس الا ويمكن للطالب أن يتحقق من أن هذا هو الواقع بأن يضع أى مقدار يريده عوضا عن  $\frac{1}{4}$  (ب - ح -) بدلا من المقدار الصحيح فالزوايا الثلاث أ ب حـ يبقى مجموعها مساويا الى ١٨٠°

ويمكن التحقيق التام بإيجاد مقادير لو (أ ÷ حـ أ) ثم مقدار لو (ب ÷ حـ ب) أو مقدار لو (حـ ÷ حـ حـ) أتى كل منهما يساوى لو ٢ ب فيكون

لو ب = ٣,٨٦٢٩٢٣	لو أ = ٣,٧٧٥٧٣٧
لو حـ ب = ١,٩٩٦٧٤٠	لو حـ أ = ١,٩٠٩٥٥٣
٣,٨٦٦١٨٣	٣,٨٦٦١٨٤

فإذا حصل وكانت نتيجة التحقيق غير مرضية فالخطأ يمكن أن يكون (١) في عملية التحقيق نفسها (٢) في مقدار  $\frac{1}{4}$  (ب - ح) أو (٣) في مقدار لو (بفرض صحة مقدارى ب ٦ ح) فإنا لم تكن الزوايا صحيحة فمن المحال أن يكون لو ١ صحيحا لأنه يتوقف على الحصول على مقدار  $\frac{1}{4}$  (ب - ح) بالضبط ولأجل البحث فيما إذا كانت الزوايا صحيحة يبحث عن لو ح - لو ح ٢ وهو المقدار الذى يجب أن يكون مساويا الى لو ب - لو ح ٢ (ويساوى في هذه الحالة ٣,٨٦٦١٨٣) فإذا اتفقت هذه الكميات فالزوايا مضبوطة ويكون الخطأ في العمود الرابع فقط وإذا لم يتفق شئ من هذه القيم الثلاث لمقدار لو ٢ ب فالزوايا ب ٦ ح غير صحيحتين وكذلك لو ١ فأول ما يبحث عنه في هذه الحالة هى مقادير ب - ح ٦ ب + ح وهناك طريقة جيدة للتحقيق وهى أن يجمع مقداراهما ويقسم الناتج على ٢ فيلزم أن يكون الناتج مساويا الى ب وهذا موضع كثيرا ما يدخل فيه الغلط بحيث يحسن على الدوام أن يبدأ بهذا التحقيق فإذا لم يكن الخطأ في هذا الموضع فهناك خطأ في اللوغاريتم أو في العمود الثالث وينتج من ذلك أيضا خطأ في العمود الرابع طبعاً وفي هذه الحالة يكون الأصوب أن يشتغل عاملان في الحساب مستقلين ثم تقابل الحسابات التى عملها أحدهما على التى عملها الآخر .

وهناك مسألة صغيرة تستحق الالتفات وهى الطريقة التى يجب أن يحسب بها مقدار  $\frac{1}{4}$  (ب + ح) من مقدار  $\frac{1}{4}$  آ فن المعلوم أن  $\frac{1}{4}$  (ب + ح) ٦ ٦ آ مجموعهما معا = ٩٠ إلا أنه لأجل إيجاد الزاوية المطلوبة يلزم أن نلاحظ دائماً أن مقدار ٩٠ مكون من ٥٩ ٥٩ ٨٩ ومن عشرة أجزاء عشرية من الثانية واذن فيمكن أن يكتب مقدار  $\frac{1}{4}$  (ب + ح) مباشرة بالابتداء من الدرجة وهذا أمر واضح لو نظرنا الى الزوايا

$$\begin{array}{r} \text{فالزوايا هي في المثال السابق } ٢٧ \quad ٨ \quad ٤٤,٢ \\ ٦٢ \quad ٥١ \quad ١٥,٨ \\ \hline ٨٩ \quad ٥٩ \quad ٥٩, (١٠) \end{array}$$

ومجموع ذلك هو

## ١٧٦ - المتعمم اللوغاريتمي

وهناك أمر آخر ينبغي الالتفات اليه في المثال المذكور في البند السابق اذا لم يوجد لوغاريتم القاطع في جدول اللوغاريتم وهو البحث عن أحسن طريقة للحصول عليه من لو جتا أو من ١٠ + لو جتا (وهي المرموز لها بالرمز ل جتا) وتلك هي الكمية المبينة بالجدول

$$\text{ل.ا.} \quad \text{قا ه} = \frac{1}{\text{جتا ه}}$$

$$\text{وينتج من ذلك أن} \quad \text{لو قا ه} = - \text{لو جتا ه}$$

$$= ١٠ - \text{ل جتا ه}$$

وحيث نذ فلو طرحنا ل جتا ه من ١٠ فانتا نجد لو قا ه ولأجل الحصول على ذلك بالسهولة نتذكر أن عشرة = (١٠) ٩,٩٩٩٠٠٠٠ أى جملة أرقام كلها تسعات ماعدا الرقم الأخير فانه عشرة فاذا لاحظنا ذلك فان مقدار لو قا ه يمكن أن يكتب مباشرة بالابتداء من اليسار

$$\text{فاذا كان} \quad \text{ل جتا ه} = ٩,٩١٧٧٧٧$$

$$\text{يكون} \quad \text{لو قا ه} = ٠,٠٨٢٢٢٣$$

فمجموع كل رقمين متناظرين هو تسعة ماعدا الرقمين الأخيرين من جهة اليمين فان مجموعهما ١٠ وينبغي الالتفات الى الحيلة التي فيها الرقم الأخير أو الأرقام الأخيرة تساوى صفرا



فإذا كان      لو جتا ه = ٩,٧٦٨٣٢٠

فانه يكون      لو قا ه = ٠,٢٣١٦٨٠

فى هذه الحالة يكون الرقم الأخيران صفرين ويكون الرقم التاليان  
لهما هما اللذان مجموعهما ١٠

وينبغى أن يلاحظ أن ل جتا ه ولو قا ه يساوى مجموعهما ١٠ ولكن  
اللوغاريتم الحقيقى أى لو جتا ه ٦ لو قا ه مجموعهما يساوى صفرا ومثل هذين  
اللوغاريتمين يقال ان كلا منهما متمم للآخر أى أن لو قا ه هو متمم لو جتا ه  
٦ لو جتا ه هو متمم لو قا ه أو يقال اختصارا أن الارتباط بين هكنا

لو قا ه = متمم لو جتا ه

لو جتا ه = متمم لو قا ه

وهذه العبارة ترادف قولنا لو قا ه = - لو جتا ه وبالعكس الا أن  
هناك فرقا وهو أن كتابة المتمم اللوغارىتمى بدلا من - لو تدل على أن  
الكسر الاعشارى من اللوغارىتم موجب

فعلى ذلك اذا كان      لو جتا ه = ٩,٩١٧٧٧٧

فان      - لو جتا ه = ١ - ٩,٩١٧٧٧٧

٦      متمم لو جتا ه = ٠,٨٢٢٢٢٣

وهناك أمثلة أخرى للمتم اللوغارىتمى وهى لو ظا ه ولو غطا ه وأيضا  
لو حا ه ولو قتا ه فان كل زوج هو حالة خصوصية من لو ١ ولو  $\frac{1}{1}$   
اللذين هما على الدوام متممان لبعضهما

وكل من لو حا ه ٦ لو جتا ه سالب دائما وأما متمهما أى  
لو قتا ه ٦ لو قا ه فهما موجبان على الدوام

## تمارينات (٢٧)

المطلوب حساب الأضلاع والزوايا المجهولة في المثلثات المشتملة على المعاليم الآتى بيانها مع تحقيق النتيجة في كل حالة وإذا كان هناك مثلثان يحلان المسألة فالمطلوب حسابهما معا

وإذا كانت المسألة مستحيلة الحل فالمطلوب بيان السبب مع العناية التامة بترتيب العمل وضبطه

- (١)  $٢٧^{\circ} ١٥' ٢٧'' = \text{ب} ٣٤٧,٦٥ = \text{أ} ٢٧^{\circ} ١٥' ٢٧'' = \text{ح} ٦٨^{\circ} ٤٨' ٢٣''$
- (٢)  $١٥,٢٧٥ = \text{أ} ٣٢^{\circ} ٢٥' ٧٣'' = \text{ب} ٤٢^{\circ} ١٧' ٤٨''$
- (٣)  $٣٥,٣٧٦ = \text{ب} ٤٧,٥٤٨ = \text{أ} ٢٠^{\circ} ١٧' ٣٢''$
- (٤)  $٥٤,٦٣٦ = \text{ب} ٥٤,٦٣٦ = \text{أ} ٢٦^{\circ} ٣٦' ٥٤''$
- (٥)  $٢٧,٥٤٨ = \text{ب} ٣٢١,٦٢٤ = \text{أ} ١٤^{\circ} ١٧' ٤٦''$
- (٦)  $١٢٣,٧٧٤ = \text{ب} ٢٠٦,٢٩٠ = \text{أ} ١١,٤' ٥٢' ٣٦''$
- (٧)  $٢٠٦,٢٩٠ = \text{ب} ١٦٥,٠٣٢ = \text{أ} ٦' ٤٨' ٥٣''$
- (٨)  $٣٧٥٦٨ = \text{ب} ٤٦٢٢١ = \text{ح} ٤٨٩٢٥$
- (٩)  $٢٩٥٤٢,٣ = \text{ب} ١٧٦٥٤,٨ = \text{ح} ١٢٧٦٥,٧$
- (١٠)  $٢٠١,٢٩٥ = \text{ب} ١٢٠,٧٧٧ = \text{ح} ١٦١,٠٣٦$
- (١١)  $٧٦,٢٥٤ = \text{ب} ٩٣,٥٨٧ = \text{ح} ١٧' ٥٩''$
- (١٢)  $٣١٤٢,٥٦ = \text{ح} ٢٨٩٥,٦٣ = \text{أ} ٢٨^{\circ} ١٥' ٣٢''$
- (١٣)  $٥,١٢٣٤ = \text{ح} ٦,٧٨٩٠ = \text{أ} ٤٠^{\circ} ٢٩' ١٣٧''$
- (١٤)  $٣,٧٥٤ = \text{ب} ٥,٢٨٣ = \text{ح} ٣٠^{\circ} ١٥' ٢''$
- (١٥)  $٣٦٥٤ = \text{ب} ٥٦٢٠ = \text{ح} ١٢٤٣$

وعلى الطالب أن يضع أسئلة من نفسه مشتملة على معاليم مختلفة مع تحقيق النتائج على الدوام والعناية في دراسة المعاليم التي توصل الى نتائج مستحيلة

## الفصل التاسع

### ملحوظات حسابية

#### ١٧٧ - الطرح

أحسن طريقة لعملية الطرح في أحوال كثيرة هي الطريقة المعروفة باسم طريقة المتسم أو طريقة التجارة والأفضل أن نوضحها بمثال فنقول

المطلوب طرح  $3\frac{1}{4}$  بنسات و ٥ شلنات من ١٠ شلنات فبدلاً من الطرح بالطريقة المعتادة وهي طريقة السلف والنقل نتحصل بالتدريج على المقدار الذى يلزم ضمه الى  $3\frac{1}{4}$  بنسات و ٥ شلنات ليبلغ ١٠ شلنات فنضم  $\frac{1}{4}$  بنس ليكون المطروح ٤ بنسات و ٥ شلنات ثم يضم ٨ بنسات ليكون ٦ شلنات ثم يضم ٤ شلنات واذن يكون الفرق المطلوب هو  $8\frac{1}{4}$  بنسات و ٤ شلنات ثم اذا أريد طرح ٦٧٨٩ من ١٣٦٩٢ فتحول المسألة عقلياً الى ما يأتى « ما هو المقدار اللازم ضمه الى ٦٧٨٩ ليكون الناتج ١٣٦٩٢ » فتوضع الأرقام حسب العادة الا أن اجراء العمل العقلى يختلف بالكلية

١٣٦٩٢

٦٧٨٩

٦٩٠٣

فالعملية العقلية بالتفصيل هي كما يأتى

أولاً ٩ وثلاثة يساوى ١٢ فيكون رقم ٣ هو الرقم الأيمن من باقى الطرح وعندنا ١ فى الخانة العليا من ١٢ ينقل الى ٨ ويكون المجموع عقلياً ٩ وبعد ذلك نقول ٩ + صفر = ٩ فيكون رقم صفر هو الرقم الثانى من باقى الطرح

ويكون  $٧ +$  تسعة  $= ١٦$  فنضع رقم  $٩$  ونقل رقم واحد عقليا فيتغير  $٦$  الى  $٧$  وتكون العملية الأخيرة حينئذ  $٧ +$  ستة  $= ١٣$  فيكون رقم  $٦$  هو آخر رقم مطلوب

فاذا امتحنا النتيجة بعد ذلك بجمع الصنفين الأخيرين الى بعضهما فاننا نكون في الحقيقة مجرين العمل العقلي مرة ثانية الا أن الأرقام تكون في هذه الحالة منظورة

وهذه الطريقة ليست عظيمة الأهمية في الطرح البسيط مثل ما سبق توضيحه الا أنها مفيدة جدا في حالة لزوم طرح كيتين أو أكثر من كمية واحدة ومن أحسن طرق تطبيق هذه العملية حينما يعلم زاويتان من مثلث مستو ويطلب معرفة الزاوية الثالثة فبدلا من أن نضم الزاويتين ونطرح مجموعها من  $١٨٠^\circ$  لا يكون عندنا سوى عملية واحدة يجب اجراؤها فعلى هذا اذا علم

$$١ = ٢٢,٣ - ١٤ - ٩٧$$

$$ب = ٤٣,٨ - ٣٧ - ٤٢$$

$$ح = ٥٣,٩ - ٧ - ٧٠$$

$$١٨٠ \dots \dots$$

ويكون المجموع

ثم اذا أريد طرح مجموع  $٦٣٢٥$   $٨٩٢$  من  $٧١٨٣٢$

$$\begin{array}{r} ٧١٨٣٢ \\ ٦٣٢٥ \\ ٨٩٢ \\ \hline ٦٤٦١٥ \end{array}$$

$$٦٣٢٥$$

$$٨٩٢$$

$$٦٤٦١٥$$

الجواب

والعمليات التي عملت هي

$$\begin{array}{rcl}
 ٢ (٥٦ =) ٧ ٦ خمسة = ١٢ & & (ينقل ١) \\
 ١ (٩٦ =) ١٠ ٦ (٢٦ =) ١٢ وواحد = ١٣ & & (ينقل ١) \\
 ١ (٨٦ =) ٩ ٦ (٣٦ =) ١٢ ٦ ستة = ١٨ & & (ينقل ١) \\
 ١ (٦٦ =) ٧ ٦ أربعة = ١١ & & (ينقل ١) \\
 & & ١ ٦ ستة = ٧
 \end{array}$$

أو باختصار مع إجراء عملية الجمع بسرعة

$$\begin{array}{rcl}
 ٢ ٧ ٦ خمسة = ١٢ & & \\
 ١ ١٠ ٦ ١٢ ٦ وواحد = ٣ & & \\
 ١ ٩ ٦ ١٢ ٦ ستة = ١٨ & & \\
 ١ ٧ ٦ وأربعة = ١١ & & \\
 ١ ٦ ستة = ٧ & &
 \end{array}$$

وهناك يكون خطر نسيان نقل الرقم الحقيقي الى الخانة العليا أقل بكثير لأن الأرقام العقلية الأخيرة في كل مرة هي نتيجة الجمع الذي حصل فإذا كانت هذه النتيجة كما سبق هي ١٢ أو ١٣ ٠٠٠٠ فالرقم المنقول يكون هو ١ وفضلا عن ذلك فانتا نشعر بالحاجة الى النقل في الوقت اللائق الى العمود الثاني

وهناك أمثلة أخرى يحتاج فيها الى طرح جملة أعداد في آن واحد ستأتي في هذا الفصل

## ١٧٨ - الضرب

ان أول نقطة نستلفت إليها النظرها يجب البدء بضرب أعلى رقم من المضروب فيه حتى يكون حاصل الضرب الجزئي الأعظم أهمية هو الذي يتحصل أولا

$$\begin{array}{r}
 ٣٧٨,٦٢ \\
 ٢٩,٣١٤ \\
 \hline
 ٧٥٧٢,٤ \\
 ٣٤٠٧,٥٨ \\
 ١١٣,٥٨٦ \\
 ٣,٧٨٦٢ \\
 ١,٥١٤٤٨ \\
 \hline
 ١١٠٩٨,٨٦٦٦٨
 \end{array}$$

والأمر الثاني الذي هو ذو أهمية عظيمة هو كيفية تعيين وضع المقادير وحواصل ضربها في الرتب الاعشارية ولأجل عمل ذلك نطلق اسم الرتبة على بعد أى عدد عن رتبة الآحاد فتكون الرتبة موجبة اذا كان الرقم الى جهة يسار الآحاد وسالبة اذا كان الرقم الى جهة اليمين

فعلى ذلك يكون العدد ٣٧٨,٦٢ مكونا من ٣ في الرتبة ٢  
 ٧٦ في رتبة ١  
 ٨٦ في رتبة الصفر  
 ٦٦ في رتبة - ١  
 ٢٦ في رتبة - ٢

وبدلا من قولنا أن ٣ هي ٣ في الرتبة الثانية يمكن أن يقال هي ٣٠ وحدة من الرتبة الأولى أو ٣٠٠ وحدة من رتبة الصفر الخ

ويلاحظ أن الرتبة هي نفس القوة لعدد ١٠ المشتمل عليها العدد وذلك لأن ٣ تدل على ٣٠٠ أى ٣ أمثال ١٠ أو ٣٠ مرة ١٠ أو ٣٠٠ مرة ١٠ وهكذا في الأعداد الأخرى مثلا ٦ هي ٦ أمثال ١٠ و ٢ هي ضعف ١٠

وينتج من ذلك أن أى عدد مثل أ رتبته م إذا ضرب في عدد رتبته د  
 فحاصل الضرب يساوى أ رتبته م + د  
 وإذا ففى عملية الضرب الأولى عندنا حاصل ضرب ٢ من الرتبة الأولى  
 فى ٢ من الرتبة — ٢ فالنتائج هو ٤ من الرتبة — ١ أو ٤٠ وعملية الضرب  
 الأخيرة كانت ٤ من رتبة — ٣ مضروبة فى ٣ من رتبة ٢ فالنتائج هو ١٢  
 من رتبة — ١ وأعلى رقم منه هو ١ من رتبة صفر وهذا هو أعلى رقم فى السطر  
 ١,٥١٤٤٨

### ١٧٩ — الضرب المختصر

وفى كثير من الأحوال يحتاج الى معرفة ضرب عددين لفأية عدد قليل  
 من الأرقام فقط وفى هذه الحالة يكون من المهم تجنب حساب جملة من الأرقام  
 القليلة الأهمية والتي ستحذف فى آخر الأمر وسنعطى مثالا يبين كيفية عمل ذلك  
 فشلا لنفرض أن المقصود إيجاد حاصل ضرب ٣٧٨,٦٢ فى ٢٩,٣١٤  
 الى أقرب عدد صحيح فيكون العمل كما يأتى فيحسب كل حاصل ضرب جزئى  
 الى أول رقم اعشارى لأجل أن يتحقق من صحة مجموعها مقربا الى الوحدة

٣٧٨,٦٢

٢٩,٣١٤

٧٥٧٢,٤

٣٤٠٧,٦

١١٣,٦

٣,٨

١,٥

١١٠٩٩

الجواب

فهما يكون الضرب في ٢ تاما لأن حاصله يتزل الى أول رقم اعشارى فقط  
الا أن الضرب في ٩ يتبدى بضرب ٩ × ٦ وليس بضرب ٩ × ٢ لأن هذا الأخير  
ينزل الى رتبة الرقم الثانى الاعشارى (أو الى رتبة - ٢) التى لا احتياج اليها ومع  
ذلك فإن نقل الرقم من ٩ الى ٢ محتاج اليه لأنه من رتبة - ١ أى أن ٩ أمثال ٢  
هو ١٨ القريب الى ٢٠ أكثر من قربه الى ١٠ فالرقم المنقول هو ٢ واذا نزل  
رقم ٥٤ الذى هو حاصل ضرب ٩ × ٦ الى ٥٦ فنضع منه ٦ وننقل ٥  
والسطر الثانى يتبدى بثلاثة أمثال ٨ ومعه ٢ منقولة من ٣ أمثال ٦ المتروكة وهكذا

### ١٨٠ — القسمة الطويلة

والطرح بطريقة المتعم يتيسر بها اختصار تفاصيل العمل اللازم للقسمة  
الطويلة اختصارا عظيما فإذا أريد الحصول على خارج القسمة بالتقريب فقط  
فإن هناك اختصارا مؤسسا على طريقة الضرب المختصر يترتب عليه زيادة  
اختصار العمل وهالك مثالا بين العمل كله أولا والطريقة المختصرة ثم الطريقة  
الموجزة المستعملة فى الحصول على خارج القسمة مشتملا على ثلاثة أرقام فقط

مثال — المطلوب قسمة ١١٠٩٩ على ٣٧٨,٦٢

٣٧٨,٦٢	١١٠٩٩,٠	(١)
٣٩,٣١٤	٧٥٧٢,٤	
	٣٥٢٦,٦٠	
	٣٤٠٧,٥٨	
	١١٩,٠٢٠	
	١١٣,٥٨٦	
	٥,٤٣٤٠	
	٣,٧٨٦٢	
	١,٦٤٧٨	



٣٧٨,٦٢	١١٠٩٩	(٢)
٢٩,٣١٤	٣٥٢٦٦	
	١١٩٠٢	
	٥٤٣٤	
	١٦٤٧٨	

ففي الطريقة الثانية كُوت عمليات الضرب عليا ووضعت المقادير المحتاج اليها لاضافتها الى الحواصل المختلفة لأجل ايجاد الصف السابق من الأرقام فمثلا  $٢ \times ٢ = ٤$  وستة  $= ١٠$  ثم  $٢ \times ٦ + ١ = ١٣$  وستة  $= ١٩$  ثم  $٢ \times ٨ + ١ = ١٧$  واثنين  $= ١٩$  وهكذا فيكون الباقي ٣٥٢٦٦ وهكذا في جميع البواق الأخرى

وقد يكون من المشكل في أول الأمر أن يكتب الباقي بهذه الكيفية مباشرة ولكن قليلا من التمرين يعطى سرعة في العمل ووثوقا بضبطه ويمكن التحقق من ضبط حساب البواق بطريقة اسقاط التسعات التي يؤسس استعمالها على أن الباقي بعد قسمة أى عدد على ٩ هو نفس الباقي بعد قسمة مجموع أرقامه على ٩

فمثلا اذا قسم ٣٧٨٦٢ على ٩ فانه يبقى ٨ أو ١ وكذلك اذا قسم  $٣ + ٧ + ٨ + ٦ + ٢$  واذن فمن السهل أن يعرف الباقي بمجرد النظر من قسمة أى عدد على ٩ (وذلك لأنه من الواضح أنه عند تكوين مجموع الأرقام المعنوية لا نضم أى عدد يكون مضاعفا للعدد ٩ فمثلا  $٣ + ٧ + ٨$  هو مضاعف لعدد ٩ واذن يرى أن الباقي هو  $٢ + ٦$ )

ويمكن أن يسمى هذا الباقي زيادة العدد وذلك من باب الاختصار واذن .  
 فزيادة ٣٧٨٦٢ هي ٨ أو ١ أى أن هذا العدد هو بالصورة  $١٩ - ١$

واذن ففى هذا المثال تكون زيادة المقسوم عليه هى — ١ وزيادة المقسوم  
هى + ٢

وحواصل الضرب الجزئية هى ٢ (١٩ — ١) ٩٦ (١٩ — ١) ٣٦  
٣ (١٩ — ١) الخ أى أن الزيادات المتوالية هى — ٢ ٦ ٠ ٦ ٣ —  
٦ — ١ — ٦ — ٤

واذن فالباقي ٣٥٢٦٦ يلزم أن يحتوى على الزيادة ٢ + ٢ أو ٤  
٦ ١١٩٠٢ » » » » ٤ + ٠ أو ٤  
٦ ٥٤٣٤ يشتمل على الزيادات ٤ + ٣ أو ٧  
٦ ١٦٤٧٨ » » » ١ + ٧ أو ٨

وهذا الأمر هو ما يتحقق بالامتحان

ولا ضرورة لاستعمال التحقيق فى كل باق بل فى الباقي الأخير لأن النظرية  
التي تستعمل فى هذا الصدد هى أن زيادة المقسوم — حاصل ضرب زيادة  
المقسوم عليه فى زيادة خارج القسمة = زيادة الباقي الأخير

واذن فاذا راعينا أن ٢٩٣١ (الذى زيادته = + ٦) هو خارج القسمة  
الذى يبقى الباقي ١٦٤٧٨ فانه يكون

$$\text{زيادة } ١٦٤٧٨ = ٢ + ١ \times ٦ = ٨$$

وهذا صحيح

واذا تبين من الامتحان عدم صحة الباقي الأخير يجب علينا أن نمتحن  
البواقي السابقة الى أن نصل الى باق يكون صحيحا فنسير فى العمل من بعده  
الى أن نصل الى موضع الخطأ

(٣) إذا أريد الحصول على خارج القسمة بالتقريب بأن يكون صحيحا لغاية ثلاثة أرقام فليس من الضروري وجود جميع الحواصل فيمكن اختصارها بترك الأرقام الصغيرة من المقسوم عليه فالعمل المختصر مبين أولا بالحواصل المختصرة وثانيا بالبواقي فقط

٣٧٨,٦٢	١١٠٩٩	٣٧٨,٦٢	١١٠٩٩
٢٩,٣	٣٥٢٧	٢٩,٣	٧٥٧٢
	١٢٠		٣٥٢٧
			٣٤٠٧
			١٢٠

١٨١ — وقد تختصر بعض عمليات الضرب والقسمة الكثيرة الوجود وتجعل بسيطة ببعض طرق مخصوصة وبعض تلك الطرق سيوضح فيما يلي  
أما ما يتعلق من ذلك بالمقاييس والمكاييل المترية والانكليزية فستبين في الفصل التالي

#### ١٨٢ — الضرب في النسبة التقريبية ط

ط هو رمز للنسبة بين محيط أى دائرة وقطرها ومقداره الرقى هو  $٣,١٤١٥٩٢٦٥٠٠٠٠٠$  أو بالتقريب جدا  $٣,١٤١٦$  وهناك مقدار تقريبي وهو  $٣\frac{١}{٧}$  وهو موافق في الأحوال المعتادة إلا أنه أكبر من الحقيقة بقدر  $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$  من مقداره

$$\text{أى أن } ٣,١٤١٦ = ٣\frac{١}{٧} \times (١ - \frac{٤}{١٠٠٠٠}) = ط$$

وبناء على ذلك إذا ضربنا في  $٣\frac{١}{٧}$  ثم طرحنا من الناتج مقدار حاصل ضربه في  $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$  أى أربعة وحدات من رتبة ٤ فالتا نتحصل على نفس المقدار الذى يتحصل بالضرب في  $٣,١٤١٦$  وبذلك تكون عملية الضرب .  
أخصر مما يتحصل بالضرب في  $٣,١٤١٦$  مباشرة

مثال — المطلوب تقدير قيمة  $٧٣٦,٨٩ ط$

$٧٣٦,٨٩$		(٢)	$٧٣٦,٨٩$	(١)
$٣\frac{1}{٧}$			$٣,١٤١٦$	
(١)	$٢٢١٠,٦٧$	(١)	.....	$٢٢١٠,٧٦$
(٢)	$٠١٠٥,٢٧$	(٢)	.....	$٧٣,٦٩$
(٣)	$٢٣١٥,٩٤$	(٣)	.....	$٢٩,٤٧$
(٤)	$٩٣—$	(٤)	.....	$٠,٧٤$
(٥)	$٢٣١٥,٠١$	(٥)	.....	$٠,٤٤$
		(٦)	.....	$٢٣١٥,٠١$

ففى (١) قد بينا عملية الضرب مباشرة وقد استلزمت ست عمليات أما فى (٢) فالعملية المبينة بالوضع  $(٣\frac{1}{٧})(١ - \frac{٤}{١٠٠٠})$  وهى خمس عمليات والعملية الرابعة هى متحصلة بضرب  $٢٣١٥,٩٤$  فى أربعة آحاد من رتبة — ٤ وهذا يعطى بالضبط مقدارا أقل قليلا من  $٠,٩٣$  لأنه أقرب الى  $٠,٩٣$  أكثر من قربه الى  $٠,٩٢$ .

وهناك طريقة تقرب من هذه فى الضبط وتتحصل بأن نأخذ

$$ط = ٣\frac{1}{٧} - \frac{1}{٨٠٠}$$

وفى هذا المقدار كل العمليات تكون على السطر العلوى فيكون

$٧٣٦,٨٩$	
$٣\frac{1}{٧}$	
(١)	..... $٢٢١٠,٦٧$
(٢)	..... $١٠٥,٢٧$
(٣)	..... $٢٣١٥,٩٤$
(٤)	..... $٠,٩٢$
(٥)	..... $٢٣١٥,٠٢$

فالعملية الرابعة هنا هي قسمة ٧٣٦,٨٩ على ٨٠٠

١٨٣ — القسمة على ط

للقسمة على  $\frac{1}{7}$  ضرب في  $\frac{7}{22}$  ويزيد الناتج بقدر  $\frac{1}{11000}$  من مقداره أى نأخذ

$$\left( \frac{4}{11000} + 1 \right) \frac{7}{22} = \frac{1}{ط}$$

مثال — المطلوب قسمة ٢٣١٥,٠١ على ط

$$\begin{array}{r} 2315,01 \\ 7 \\ \hline 2 \div 16205,07 \\ 11 \div 8102,035 \\ \hline 736,094 \\ + 0,295 \\ \hline 736,89 \end{array}$$

وهناك طريقة قريبة مما سبق في الضبط بل أبسط ونحصل بأن نأخذ

$$-\frac{1}{100} - \frac{1}{4} = \frac{1}{ط}$$

وهو أكبر من الحقيقة قليلا جدا

$$\begin{array}{r} 2315,01 \\ 771,67 \\ - 23,15 \\ - 11,58 \\ \hline 736,94 \end{array}$$

فإذا أريد الحصول على دقة أعظم فعندنا

$$\frac{1}{200} - \frac{1}{200} - \frac{1}{100} - \frac{1}{3} = \frac{1}{ط}$$

ويكون العمل هكذا

$$\begin{array}{r} 2315,01 \\ \hline 771,67 \\ 23,15 - \\ 11,075 - \\ 0,58 - \\ \hline 736,89 \end{array}$$

١٨٤ - الضرب في ط<sup>٢</sup>

قد يحتاج اليه أحيانا في الأعمال التقريبية يكفي أن يؤخذ ط<sup>٢</sup> = ١٠

فإذا أريد التدقيق فالتأخذ ط<sup>٢</sup> = ١٠ (١ - ١٣٠٤ ٠,٠)

مثال - المطلوب إيجاد مقدار ٧٣٦,٥٨ ط<sup>٢</sup>

$$\begin{array}{r} 7365,8 \\ 73,66 - \\ 22,10 - \\ 0,29 - \\ \hline 7269,75 \end{array}$$

١٨٥ - القسمة على ط<sup>٢</sup>

$$\frac{1}{ط} = 0,101321 = \frac{1}{9,87} (1 + 0,1321)$$

فعملية الضرب مباشرة هنا بسيطة جدا فيجب أن نبدأ بأعلى رقم كما هو الواجب دائما

مثال - المطلوب قسمة ٧٢٦٩,٧٥ على ط<sup>٢</sup>

$$٧٢٦,٩٧٥$$

$$٧,٢٧٠$$

$$٢,١٨١$$

$$٠,١٤٥$$

$$٧$$

$$٧٣٦,٥٧٨$$

وهناك مقدار آخر أقل دقة الا أنه لا يزال كافيا في الحسابات العملية فن  
باب مساعدة المذاكرة نأخذ

$$ط^٢ = ١٠ (١ - ٠,٠١٣)$$

$$٦ \quad \frac{١}{ط^٢} = \frac{١}{١٠} (١ + ٠,٠١٣)$$

والخطأ في المقدار الثاني هو ٢ من ١٠٠٠٠ وفي المقدار الأول  
٤ من ١٠٠٠٠٠ فقط

١٨٦ - تحويل الدرج الى التقدير الدائري

$$\text{ان المعامل هو } \frac{ط}{١٨٠} = \frac{٠,٠١٧٤٥٣٢٩٢٥٢٠٠٠}{١٨٠}$$

وهذا المقدار يساوى على التقريب  $\frac{٧}{٤٠٠} = ٠,٠١٧٥$  ويمكن أن يصير  
أدق بأن يطرح  $\frac{١}{٤}$  في المائة من الناتج هكذا

$$\frac{٧}{٤٠٠} (١ - \frac{١}{٤}) = ٠,٠١٧٤٥٦٢٥$$

وهذا المقدار دقيق الى ٣ من ١٠٠٠٠ وموافق لجميع الأغراض العملية  
الا أنه قد يكون من المفيد أن يذكر التوسع الآتي في التقريب

$$\frac{7}{400} (1 - \frac{1}{400} - \frac{1}{1600}) = 0.1745333000$$

وهذا المقدار دقيق الى  $\frac{1}{4}$  من المليون (أنظر مسألة ٦ من تمرينات ٢٨)  
فالعامل  $\frac{7}{400}$  يمكن أن أريد أن يوضع بالصورة

$$\frac{1}{400} (1 + \frac{1}{400}) \text{ أو } \frac{1}{400} (1 + \frac{1}{400})$$

والمقدار الأخير مرتب ترتيباً أوفق لكثير من الأحوال لأن القسمة على  
٦٠ قبل ضم  $\frac{1}{400}$  قد يترتب عليه وجود أرقام اعشارية دائرة وهو أمر ممكن  
تجنبه اذا أضيف  $\frac{1}{400}$  أولاً

مثال — المطلوب تحويل ٧٥,٣٤ درجة الى التقدير الدائري

$$20 \div 75,340$$

$$\underline{3,767}$$

$$60 \div 79,107$$

$$(1) \quad \underline{1,31845}$$

$$0.003296$$

$$1 \div 400$$

$$0.000220$$

$$1 \div 6000$$

$$\underline{1,314934}$$

الجواب ١,٣١٤٩٣ زاوية نصف قطرية

اذا وجد في الزاوية دقائق و ثوان فان هذه تحول الى كسر اعشاري  
من الدرجة أو تحول هذه الدقائق والثواني جميعها أو جزء منها الى ثوان ثم تحول  
الى التقدير الدائري بالمعامل

$$(\frac{1}{1100} - \frac{1}{70} - \frac{1}{4}) \frac{1}{100000}$$



وهذا العامل يمكن تحقيقه بأنه تقريب كاف لمقدار  $\frac{\pi}{6 \times 60 \times 180}$  بالنسبة للزوايا الصغيرة ومقدار الخطأ فيها يساوى ١ من ٥٠٠٠٠ فقط

### ١٨٧ — تحويل التقدير الدائرى الى درج

لذلك يضرب فى ٦٠ ويطرح منه  $\frac{1}{4}$  فى المائة والناتج يكون أكبر من الحقيقة بقدر ٧٣ فى ١٠٠٠٠٠٠

وهذا المقدار دقيق دقة كافية لأغراض كثيرة وهو معادل لأخذ وحدة التقدير الدائرى مساوية الى ٥٧,٣°

وأدق من ذلك أن تؤخذ وحدة التقدير مساوية الى ٥٧,٢٩٥٧٨ درجة = ٥٧,٣ - ٠,٠٠٤٢٢ وهذا مضبوط الى ١ من ١٠٠ مليون والمعامل المضبوط هو بناء على ذلك

$$٠,٠٠٤٢٢ - \left( ١ - \frac{1}{4} \right) \%$$

مثال — المطلوب تحويل المقدار ٢,٧٥ زاوية نصف قطرية الى درج

$$\begin{array}{r} ٢,٧٥ \\ \times ٦٠ \\ \hline ١٦٥,٠٠ \\ ٦,٦٠ \quad \frac{1}{4} \% \\ \hline ١٥٧,٨٢٥ \quad \frac{1}{4} \% \\ \hline ١٥٧,٥٧٥ = \text{يطرح منه} \\ ٠,١١٦ = ٠,٠٠٤٢٢ \times ٢,٧٥ \\ \hline ١٥٧,٥٦٣٤ \\ \text{الجواب } ١٥٧,٥٦٣٤ = \text{درجة } ١٥٧,٣٣٤٨ \end{array}$$

ويمكن إذا أريد أن يؤخذ التصحيح  $\frac{1}{4}$  في المائة بالصورة  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  بدلا من جعله بالصورة  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  كما في المثال السابق

### تمرينات (٢٨)

(المطلوب أن تكون النتائج مضبوطة الى خمسة أرقام الا اذا أريد غير ذلك)

(١) المطلوب إيجاد حاصل ضرب  $٨١٦,٣١٧٢ \times ١٩,٤١٦٣$  مضبوطة الى خمسة أرقام

(٢) المطلوب إيجاد  $٧٥٦٢٣ \div ٠,٨٣$  مضبوطة الى أربعة أرقام معنوية

(٣) المطلوب إيجاد  $٦٧,٣٦٥ \div ٠,٤٣١٦٥$  مضبوطة الى أربعة أرقام

(٤) المطلوب إيجاد مقدار  $١٧٠٨,٤٥٩٢ \times ٠,٠٠٠٤٤٤٠٨$  مضبوطة الى أربعة أرقام

(٥) المطلوب إيجاد مساحة دائرة نصف قطرها  $١٣,٦٧٥$  مترا بحيث يكون الحاصل مضبوطة الى خمسة أرقام (يبحث عن مقدار  $\pi$  بواسطة الضرب المختصر ثم يضرب الناتج في  $٣ + \frac{1}{4}$  ويطرح من الناتج  $\frac{٤}{١٠٠٠٠}$  من مقداره)

(٦) المطلوب بيان أن ط تكافئ المقدار الآتي

$$\left( \frac{1}{2} + 1 \right) 3 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \right) \text{ مليون واحد } \left( \frac{2}{3} \right) \text{ مضبوطة الى تسعة أرقام}$$

(٧) المطلوب استعمال المقدار السابق للنسبة ط في مسألة (٥) لإيجاد مساحة مضبوطة الى تسعة أرقام بحيث تتبع في العمالة الترتيب  $(1 + \frac{1}{4})$

بـ  $\times 3$  (١ -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{2}$  الخ) أى يضم فى أقل الأمر  $\frac{1}{4}$  الى ١٣,٦٧٥  
ثم يضرب الناتج فى ١٣,٦٧٥ ثم فى ٣ ثم تطرح المقادير الآتية لأجل التصحيح

$$\frac{1}{4} \cdot 6 \frac{1}{6} \cdot 6 \frac{1}{6} \cdot 6 \frac{1}{6} \cdot 6 \frac{1}{6} \cdot 6 \frac{1}{6}$$

(٨) المطلوب حساب المقدار ٧٣١,٥٤ ط

(٩) المطلوب قسمة ٣٧,٥٤٣ على ط (١) بعملية القسمة المختصرة (٢)

بكل من طريقى التقريبات المتوالية السابق ذكرها

(١٠) المطلوب إيجاد مقدار ٥٧,٦٣٢ ط<sup>٢</sup> وامتحان الناتج بقسمته على ط<sup>٢</sup>

(١١) المطلوب قسمة ٥٧,٦٣٢  $\div$  ط<sup>٢</sup> وامتحان الناتج بضربه فى ط<sup>٢</sup>

(١٢) المطلوب تحويل الزوايا الآتية الى التقدير الدائرى

$$(١) \quad 30^\circ \quad 4' \quad 39''$$

$$(٢) \quad 43,758^\circ$$

$$(٣) \quad 40^\circ \quad 18' \quad 72''$$

$$(٤) \quad 3^\circ \quad 32' \quad 10''$$

$$(٥) \quad 32,5^\circ \quad 14'$$

(١٣) المطلوب تحويل مضاعفات وحدة التقدير الدائرى الآتية الى درج

وكسور اعشارية من الدرج أو الى درج ودقائق وثوان

$$(١) \quad 0,754320 \quad (٢) \quad 0,017453$$

$$(٣) \quad 2,31582 \quad (٤) \quad 10,0582$$

## الفصل العاشر

### المقاييس الانكليزية والمقاييس المترية

١٨٨ — حيث ان معظم الأمم المتعمدة قد اتبعت الآن الطريقة المترية في المقاييس والموازين وقد فعلت ذلك أيضا الأمة الانكليزية في المواد العلمية فمن الضروري أن يكون في الامكان تحويل المقاييس والموازين الانكليزية الى ما تساويه من المقاييس المترية وبالعكس مع السهولة

وسنبين في هذا الفصل شرحا مستوفيا نوعا للعلاقات بين الوحدات في كل من الطريقتين موضحة بكيفية تسهيل الحساب كثيرا أو قليلا وسنعطى أيضا بعض الارتباطات بين الوحدات المختلفة للكايل والموازين الانكليزية ومن الواضح أنه في الارتباطات بين المقاييس الانكليزية والمترية لا يتحصل على الضبط التام مطلقا لأن أساس كل من هذه الوحدات غير مرتبط بأساس الأخرى واذن تتحصل الارتباطات بينها بالمقارنة العملية فقط

ويعتبر الارتباط الواقع بين الأطوال مضبوطا اذا كان صحيحا لحد ١ من ١٠٠٠٠٠ ولكن في العمل يكفي بضبط مقداره ١ من ١٠٠٠٠ لأن ذلك أضبط من أى قياس عادى معتنى به

ويكفى في كثير من الأعمال بضبط أقل مما ذكر بكثير والارتباطات الآتية مرتبة بحيث يجد الحاسب أى درجة من الدقة أراد

ومن أمثلة الارتباطات المضبوطة أن ١٠ بوصات = ٢٥٤ مليمترا والخطأ فيه يساوى واحد من ١٠٠٠٠٠ تقريبا وهناك تقدير من أدق ما يمكن وهو ١٠ بوصات = ٢٥٣,٩٩٧٧٢ مليمترا وهناك تقدير آخر مقر في قانون الموازين والمقاييس لسنة ١٨٧٨ وفيه ١٠ بوصات = ٢٥٣,٩٩٥٤ مليمترا

ومن الارتباطات المضبوطة عمليا الارتباط

$$\text{مترواحد} = ٣ \text{ أقدام} = ٣ \frac{٢}{٨} \text{ بوصات} = ٣٩ \frac{٢}{٨} \text{ بوصة}$$

أو بضبط مشابه لما ذكر

$$٣٢ \text{ مترا} = ٣٥ \text{ ياردة}$$

والخطأ فيه يساوى ١ من ١٠٠٠٠ تقريبا

ومن الارتباطات المضبوطة ضبطا تقريبا ويسهل تذكرها أن ١٠ أمتار = ١١ ياردة وأن ٢٠ مترا = ٢٢ ياردة = جتيرا والخطأ في هذا نحو  $\frac{1}{4}$  في المائة لأن ٢٠ مترا تنقص عن المقدار المضبوط للطول الذى قدره ٢٢ ياردة بقدر  $\frac{1}{4}$  بوصات

وبضبط مشابه لما ذكر يكون طول ٨ كيلومترات مساويا الى ٥ أميال والسير بسرعة قدرها ٦ كيلومترات في الساعة =  $٣ \frac{٢}{٤}$  أميال في الساعة ويقابل سرعة قدرها كيلومتر واحد في عشر دقائق أو ميل واحد في ١٦ دقيقة

١٨٩ — والقواعد العملية الآتية مؤسسة على أحد الارتباطين الاتيين

$$١٠ \text{ بوصات} = ٢٥٤ \text{ ملليمترا} = ٢٥٤ \text{ سنتيمترا}$$

$$٣٥ \text{ ياردة} = ٣٢ \text{ مترا}$$

(ومعلوم أن المتر = ١٠ ديسيمترات = ١٠٠ سنتيمتر = ١٠٠٠ ملليمتر وأن ١٠٠٠ متر = كيلومترا واحدا).

(١) كيفية تحويل بوصات الى سنتيمترات

لذلك نضرب عدد البوصات في  $\frac{1}{4}$  +  $\frac{4}{100}$

وتفضل هذه القاعدة على الضرب في ٢,٥٤ لأنها أخصر منها وسنعطى هنا مثالاً يبين الطريقتين والأولى منهما هي الموصى بها والثانية بطريقة الضرب مباشرة

(٢)	(١)
٣٥,٦٤	٣٥,٦٤
٧١,٢٨	٨٩,١٠
١٧,٨٢	١,٤٢
١,٤٢	٩٠,٥٢
٩٠,٥٢	

(٢) تحويل الأقدام الى أمتار

لذلك نضرب عدد الأقدام في  $\frac{3}{4}$  +  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{100}$  [المساوى الى  $\frac{12}{100}$ ]

وهذا التقريب الأخير ممكن حذفه بالضرورة في كثير من الأحوال

(٣) تحويل الياردات الى أمتار

لذلك نضرب عدد الياردات في  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{40}$  (لأن  $\frac{22}{40} = \frac{11}{20} = \frac{1+11}{20}$ )

(٤) تحويل سنتيمترات الى بوصات

لذلك نضرب عدد السنتيمترات في  $\frac{4}{100} - \frac{1}{100} - \frac{1}{100}$  (لأن  $\frac{29}{100} = \frac{29}{100}$ )

(٥) تحويل أمتار الى أقدام

لذلك نضرب عدد الأمتار في  $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$  (لأن  $\frac{39}{12} = \frac{39}{12}$ )

(٦) تحويل أمتار الى ياردات

لذلك نضرب عدد الأمتار في  $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{46}$  (لأن  $\frac{39}{46} = \frac{39}{46}$ )

١٩٠ - ولامتحان دقة ما تقدم من التقريبات نبحث عن الارتباط بين الكميات المذكورة في بعض كتب المقاييس فنجد أن

$$١ \text{ بوصة} = ٢,٥٤٠٠ \text{ سنتيمترا}$$

$$١ \text{ قدم} = ٠,٣٠٤٧٩٧ \text{ مترا}$$

$$١ \text{ ياردة} = ٠,٩١٤٣٩٢ \text{ »}$$

6

$$١ \text{ سنتيمتر} = ٠,٣٩٣٧٠ \text{ بوصة}$$

$$١ \text{ متر} = ٣,٢٨٠٨٧ \text{ أقدام}$$

$$= ١,٠٩٣٦٢٣ \text{ ياردة}$$

والعمل هو كما يأتي

(١) المطلوب تحويل ٣,٢٨٠٩ أقدام الى أمتار

فالقاعدة هي أن نضرب في  $\frac{٣}{١}$  +  $\frac{٣}{١}$  -  $\frac{٣}{١}$  ...

$$\begin{array}{r} ٣,٢٨٠٨٧ \\ ٠,٩٨٤٢٦١ \\ ٠,٠١٦٤٠٤ \\ ١,٠٠٠٦٦٥ \\ ٦٥٦ - \\ \hline ١,٠٠٠٠١ \end{array}$$

فالجواب يكون بالضرورة مترا واحدا وهذا هو اللازم مع دقة مساوية للدقة المستخرجة من أضبط المقاييس

(٢) المطلوب تحويل ١,٠٩٣٦٢٣ ياردة الى أمتار

فالقاعدة هي أن نضرب ١ -  $\frac{١}{٧}$  +  $\frac{١}{٧}$

$$\begin{array}{r}
 ١,٠٩٣٦٢٣ \\
 ١٠٩٣٦٢ \\
 \hline
 ٠,٩٨٤٢٦١ \\
 ١٥٦٢٣ \\
 \hline
 ٠,٩٩٩٨٨٤ \\
 ١ - ٠,٠٠٠١١٦
 \end{array}$$

واذن فهناك خطأ يبلغ مقداره ١ من ١٠٠٠٠ ويمكن امتحان المضاريب الأخرى بطريقة مشابهة لهذه فتوجد مضبوطة لحد ١ في عشرة آلاف

١٩١ — وهذه العوامل وما أشبهها لتحويل السطوح والأحجام سنشرح في الجداول الثلاثة الأولى

وقد بينا أيضا لوغار يمتد هذه المضاريب مشتملة على ستة أرقام اعشارية وذلك لتحويل المقاييس الانكليزية الى المترية لأجل الرجوع اليها عند الحاجة وهذه اللوغاريتمات لازمة في تحويل المقاييس المترية الى الانكليزية أيضا الا أنها تطرح في هذه الحالة

والجداول مرتبة في ثلاثة أعمدة فالمضاريب اللازمة للتحويل الى المقاييس المترية في العمود الأيمن ولوغار يمتداتها في الوسط والمضاريب اللازمة لتحويل المقاييس المترية الى المقاييس الانكليزية في العمود الأيسر والأحسن توضيح ذلك بمثال

فالقانون الأول للتحويل من جدول الأطوال هو

$$\frac{4}{100} + \frac{4}{10} = \frac{\text{البوصة}}{\text{الستيمتر}}$$



ومعنى ذلك أن نسبة البوصة الى الستيمتر هي  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$  أى أن البوصة  $= (\frac{1}{4} + \frac{1}{16})$  ستيمتر

وعلى ذلك يكون  $\approx$  بوصات  $\approx (\frac{1}{4} + \frac{1}{16})$  ستيمتر

واذن فهذه الكمية أى  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$  هى المعامل الذى يستعمل لتحويل البوصات الى ستيمترات

وفى الجدول الثانى يكون الكسر بالصورة  $\frac{\text{بوصة مربعة}}{\text{ستيمتر مربع}}$  ومعنى ذلك نسبة

بوصة مربعة الى ستيمتر مربع التى هى عبارة عن مربع النسبة  $\frac{\text{بوصة}}{\text{ستيمتر}}$  من

الممكن أن تكتب  $(\frac{\text{بوصة}}{\text{ستيمتر}})^2$  ومعكوس هذه النسبة مكتوب فى العمود الأيسر بهذه الكيفية

وفى جدول الأحجام قد وضعت الكسور بحيث تكون بسيطة بسيطة كافية تغنى عن وضعها بطريقة جبرية والضبط فيها هو على الأقل لحد واحد من ألف وربما كان هذا الضبط كافيا فى جميع الأغراض الا أن الجدول القانونى قد وضع أيضا لغرض استيفاء المبحث

والجدول الرابع هو جدول قصير خاص بالموازين

والجدول الخامس يشتمل على بعض ارتباطات بين الأثقال والأحجام وذلك بالنسبة للماء

وبواسطة هذا الجدول يمكن تعيين ثقل الماء اذا علم حجمه مباشرة وكذلك الحجم اذا علم الثقل

وقضلا عن ذلك فانه اذا علم الثقل النوعى لأى مادة فانه هذا الجدول يستعمل فى تعيين الحجم اذا علم الثقل وبالعكس

مثال — ان القدم المكعب من الماء وزن ٦٢,٣ رطلا فاذا كان الثقل النوعي يساوى سـ فثقل قدم مكعب من المادة يساوى سـ (٦٢,٣ رطلا) واذا كانت المادة سائلة فعندنا الارتباط جالون واحد وزن سـ  $\times$  (١٠ أرطال) لأن جالونا واحدا من الماء وزن ١٠ أرطال

أما في الطريقة المترية فان الارتباط أبسط من ذلك لأن لترا واحدا من الماء وزن كيلوجراما واحدا واذن فالثقل بالكيلوجرام لأى حجم من أى مادة = عدد اللترات التى فى الحجم مضروبا فى الوزن النوعي للمادة

(١)

## المقاييس المترية الطولية

متر واحد = ١٠ ديسيمترات = ١٠٠ سنتيمتر = ١٠٠٠ مليمتر  
١٠٠٠ متر = ١٠٠ ديكامتر = ١٠ هكتومترات = ١ كيلومتر

مقاييس لتحويل المقاييس المترية الى انكليزية	لوغاريتمات	مقاييس لتحويل المقاييس الانكليزية الى فرنسوية
سنتيمتر = $\frac{1}{10} - \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} = \frac{4}{10}$	٠,٤٠٤٨٣٠	بوصة = $\frac{10}{4} + \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ سنتيمتر
قدم = $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{3000} = \frac{1}{3}$	١,٤٨٤٠١١	قدم = $\frac{3}{10} + \frac{1}{20} - \frac{1}{5000} = \frac{1}{3}$ متر
متر = $\frac{1}{12} + \frac{1}{96} - \frac{1}{8000} = \frac{1}{10}$	١,٩٦١١٣٣	ياردة = $\frac{1}{10} + \frac{1}{70} + \frac{1}{10000} = \frac{1}{10}$ متر
كيلومتر = $\frac{5}{8} \left( \frac{1}{1400} - \frac{1}{200} - 1 \right)$	٠,٢٠٣٦٤٥	ميل = $\frac{8}{5} \left( \frac{1}{1400} + \frac{1}{200} + 1 \right)$
متر = $\frac{1}{20} \left( \frac{1}{1400} - \frac{1}{200} - 1 \right)$	١,٣٠٣٥٥٥	جزير = $\frac{20}{1} \left( \frac{1}{1400} + \frac{1}{200} + 1 \right)$ متر

## الجدول الثاني

### المقاييس المترية للسطوح

المتر المربع  $\equiv 100$  ديسيمتر مربع  $= 10000$  سنتيمتر مربع  $= 1000000$  مليمتتر مربع

$1000000$  متر مربع  $= 10000$  ديكا متر مربع  $= 100$  هيكتومتر مربع  $=$  كيلومترا مربعا

والارتباطات الرئيسة هي

$100$  سنتيمتر مربع  $= \frac{1}{4}$  بوصة مربعة

$10 \frac{1}{4}$  أمتار مربعة  $= 12$  ياردة مربعة

والجدول الآتي يبين المضارب ولوغاريتماتها

مضارب لتحويل المقاييس المترية الى انكليزية	لوغاريتمات	مضارب لتحويل المقاييس الانكليزية الى المترية
$\frac{1}{200} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \left( \frac{\text{سنتيمتر}^2}{\text{بوصة}^2} \right)$	0.009660	$\frac{200}{31} =$ بوصة مربعة سنتيمتر مربع
$\frac{1}{70} + 10 \frac{3}{4} = \left( \frac{\text{متر}^2}{\text{قدم}^2} \right)$	2.968022	$\left( \frac{1}{270} + \frac{1}{9} + 1 \right) \frac{1}{12} =$ قدم مربع متر مربع
$\left( \frac{1}{300} - 1 \right) \frac{12}{10} = \left( \frac{\text{متر}^2}{\text{ياردة}^2} \right)$	1.933360	$\left( \frac{1}{300} + 1 \right) \frac{10}{12} =$ ياردة مربعة متر مربع

وفضلا عما تقدم توجد مقاييس الأراضي الآتية

1 أ =  $100$  متر مربع = ديكا مترا مربعا

100 أ = هيكتارا واحدا

100 هيكتار = كيلومترا مربعا

وهناك ارتباطات تقريبية

١٠ آ ر = ١١٩٦ ياردة مربعة = ربع فدان انكليزي تقريبا

١ هكتار =  $2\frac{1}{4}$  فدان انكليزي »

١ كيلومتر مربع = ٢٥٠ » » »

ومعامل التصحيح في كل حالة هو ١ - ٠.١١٦ أى أن الخطأ هو

نحو  $\frac{1}{4}$  في المائة ففي تحويل المقاييس الانكليزية الى مقاييس مترية يلزم

أن يضم نحو  $\frac{1}{4}$  في المائة لأجل التصحيح

(٣)

### المقاييس المترية للأحجام

هذه المقاييس هي مكعبات مقاييس الأطوال

فالديسيمتر المكعب يسمى لترا وهو المقياس الأساسى لتقدير السوائل

والحبوب وما أشبهها فاما التراب والحصى ونحوها فتقدر بالمتر المكعب

والمقياس الأساسى الانكليزى لتقدير السوائل هو الجالون وهو مرتبط

بالمقاييس الانكليزية الأخرى للحجم بالارتباطات التقريبية الآتية)

٣٦ جالونا تساوى ١٠٠٠٠ بوصة مكعبة

$2\frac{1}{4}$  جالونات تساوى قدما مكعبا واحدا

وهناك ارتباط أضبط وهو أن ١٠٠٠٠ بوصة مكعبة تعادل  $\frac{1}{18}$  ٣٦

جالونا أى أن ٣٦ جالونا تنقص عن ١٠٠٠٠ بوصة مكعبة بقدر  $\frac{1}{4}$  ١٥ بوصة

مكعبة و ١٠٠ قدم مكعب = ٦٢٣ جالونا وعلى ذلك يكون القدم المكعب

يعادلا الى  $(٦٠ + \frac{1}{4} - \frac{1}{8})$  من الجالون =  $(١١٦ + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$

جالونا و ١٠٠ جالون تساوى  $\frac{1}{3}$  ١٦ قدما مكعبا

المتر المكعب الواحد = ١٠٠٠ ليتر

الليتر الواحد = ١٠٠٠ سنتيمتر مكعب

السنتيمتر المكعب الواحد = ١٠٠٠ ملليمتر مكعب

والارتباطات بين هذه والمقاييس الانكليزية (مع ضبط الى جزء من ألف جزء على الأقل) هي كما يأتي

١٦ $\frac{2}{5}$ سنتيمترا مكعبا	=	بوصة مكعبة واحدة
٦١ بوصة مكعبة	=	ليترا واحدا
٢٨ $\frac{1}{4}$ ليتر	=	قدما مكعبا واحدا
٣٥ $\frac{1}{4}$ قدما مكعبا	=	مترا » »
١٧ ياردة مكعبة	=	١٣ مترا مكعبا

6

١٠٠ ليتر = ٢٢ جالونا

٤٠٠ ليتر = ١١ بوشل

أى ان اللتر = نحو  $\frac{7}{8}$  كوارت

والجدول الآتى يعطى مقدار المضارب ولو غار يتمتها

عوامل تحويل المقاييس المتريية الى مقاييس انكليزية	لو غار يتمتها	عوامل تحويل المقاييس الانكليزية الى مقاييس متريية
	١,٢١٤٤٩٠	$\left( \frac{1}{1200} - \frac{1}{40} + 1 \right) 16 = \left( \frac{3}{\text{بوصة}} \right)$
$\frac{1}{10000} + 1 = \frac{61}{3} \left( \frac{3}{\text{بوصة}} \right)$	١,٤٥٢,٣٤	$\frac{1}{60} - \frac{1}{4} + 28 = \left( \frac{3}{\text{قدم}} \right)$
$\frac{1}{60} - \frac{1}{4} + 35 = \left( \frac{3}{\text{قدم}} \right)$	٢,٤٥٢,٣٤	$\frac{1}{6000} - \frac{1}{300} + \frac{1}{40} = \left( \frac{3}{\text{قدم}} \right)$
$\frac{1}{3000} - \frac{1}{40} - \frac{4}{3} = \left( \frac{3}{\text{yard}} \right)$	١,٨٨٣,٣٨	$\frac{1}{4000} + \frac{1}{70} + \frac{3}{4} = \left( \frac{3}{\text{yard}} \right)$

(١) وينبى أن يلاحظ أن  $\frac{1}{60} - \frac{1}{4} = \frac{1}{60} + \frac{3}{10} = \frac{1}{60} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{1}{60} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6}$

وهذه المسألة انما تتعلق بأى هيئة من الأحسن

(٤)

المقاييس المترية للأوزان

$$١ \text{ كيلو جرام} = ١٠٠٠ \text{ جرام}$$

$$١٠٠٠ \text{ كيلو جرام} = \text{طنونلاته}$$

وذلك مع مراعاة الارتباطات

$$١٠ \text{ كيلوجرامات} = ٢٢ \text{ رطلا انكليزيا} \times (١ + ٠,٠٠٢١)$$

$$\text{طنونلاته واحدة} = \text{طنا انكليزيا واحد} \times (١ - ٠,٠١٦)$$

والارتباطات العكسية هي

$$٢٢ \text{ رطلا} = ١٠ (١ - ٠,٠٠٢١) \text{ كيلوجراما}$$

$$\text{طن واحد (انكليزي)} = ١ + ٠,٠١٦ \text{ طنونلاته (فرنسية)}$$

ومن هنا يستنتج

$$٥٠ \text{ كيلوجراما} = \text{قنطارا انكليزيا} - ١ \frac{٢}{٤} \text{ رطلا}$$

6

$$\text{طنونلاته فرنسية} = \text{طنا انكليزيا ناقصا} ٣٦ \text{ رطلا}$$

وعلى وجه العموم فيكفي أن يعول على ضبط المقدار بأخذ ١٠ كيلوجراما

$$= ٢٢ \text{ رطلا بدون استعمال معامل التصحيح}$$

(٥)

الارتباطات بين ثقل الماء وحجمه

(بالضبط)

جالون واحد في درجة حرارة ٦٢° فارنهایت وزن ١٠ أرطال وذلك بمقتضى  
قوانين الحكومة الانكليزية

لتر واحد في درجة ٤ مثينية وزن كيلوجراما

(بالقريب)

القدم المكعب الواحد وزن ١٠٠٠ أوقية أو  $\frac{1}{4}$  ٦٢ رطلا تقريبا

وهناك نسبة أضبط من ذلك أن القدم المكعب وزن ٦٢,٣ رطلا

ملحوظة — وليس من المفيد الحصول على دقة شديدة في الارتباطات  
التي بين أوزان السوائل وأحجامها لأن هذه الأحجام تتغير تغيرا عظيما مع تغير  
درجة الحرارة فمثلا أن حجم مقدار معين من الماء درجة حرارته ٦٢ فارنهایت  
يزيد عن حجم المقدار عينه الذي درجة حرارته ٤ درجات مثينية بقدر  $\frac{1}{100}$  غير  
أنه من المفيد أن نلاحظ أن هذه الحقيقة تجعل الارتباط الذي هو ١٠٠ لتر  
= ٢٢ جالونا أضبط من الارتباط الذي هو ١٠ كيلوجرامات = ٢٢ رطلا  
بقدر الضعف لأن الارتباط الأول لا يشمل الا على خطأ مقداره ١ في ١٠٠٠  
أما الثاني فإن الخطأ فيه يعادل ٢ في ١٠٠٠

## تمرينات (٢٩)

(١) المطلوب تحويل الأطوال الآتية الى أمتار

(١) ٣٧ قدما و ٦ بوصات

(٢) ٥٤ ياردة و ٢ قدم و ٣ بوصات

(٣) ٢٩,٣٥٢ قدما

(٤) ٤٣,٥٢٦ جتيرا

(٢) المطلوب تحويل

(١) ٣٧,٥٤٢ مترا الى ياردات

(٢) ٤٣,٣٨٩ سنتيمترا الى بوصات

(٣) ٣٣٨٧٠ مترا الى أقدام

(٣) نصف قطر قاعدتي مخروط ناقص هما ١٧,٥٤ بوصة و ٢٣,٢٨

بوصة

والمطلوب بيان مساحة القاعدتين والقطاع الواقع في وسط الارتفاع

بالسنتيمتر المربع

(٤) قبة على شكل نصف كرة قطرها يساوي ٣٢٧ قدما والمطلوب

ايجاد مقدار سطحها وحجمها بالأمتار المربعة والمكعبة

(٥) المطلوب ايجاد ثقل بوصة مكعبة من الحديد بالانوية بفرض أن

الثقل النوعي للحديد ٧,٨

(٦) المطلوب حساب كمية الأمتار المكعبة للتربة المستخرجة من حفر

بئر عمقها ١٠٠ متر وقطرها متران



مع بيان الجواب بالياردة المكعبة أيضا  
(٧) المطلوب بيان اللترات من الماء التي تشمل عليها تلك البئر اذا كانت مملوءة الى النصف

(٨) المطلوب ايجاد ثقل الماء الذي يشتمل عليه اناء اسطوانى عمقه ٣٠ سنتيمترا وقطره ٢٥ سنتيمترا

ملحوظة — ان عدد اللترات هو بعينه عدد الكيلوجرامات

المطلوب بيان الجواب بالكيلوجرامات وبالارطال

(٩) المطلوب ايجاد ثقل قضيب اسطوانى من الحديد طوله ٣ متر ومحيطه ٢٠ سنتيمترا ونقله النوعى ٧,٨

(١٠) المطلوب تحويل المسامخ الآتية الى أمتار مربعة

(١) ١٣٧,٥٨ ياردة مربعة

(٢) ١٤٣,٢٣ قلما مربعة

(٣) ٣٩ ياردة مربعة وه أقدام مربعة و ٤٦ بوصة مربعة

(٤) ٣٠  $\frac{1}{4}$  ياردة مربعة

(١١) المطلوب تحويل المسطحات الآتية الى آرات وهيكتارات

(١) ١٣  $\frac{3}{4}$  فدان انكليزيا

(٢) ٣٠٠ فدان انكليزى

(١٢) اذا كانت طريحة البناء بالطوب الأحمر الذى سمكه ١  $\frac{1}{4}$  طوبة تعادل مسطحا قدره ٣٠  $\frac{1}{4}$  ياردة مربعة واعتبرنا أن هذا القدر يعادل ٢٥ مترا

مربعاً فالمطلوب إيجاد عدد الطرائح من الطوب التي تلزم لأجل بناء البئر التي في مسألة (٦) مع فرض أن مسمك الحائط هو نفس السمك السابق بيانه

(١٣) المطلوب إيجاد ثقل كرة من الحديد قطرها ٣٠ سنتيمترا بفرض الوزن النوعي للحديد ٧,٨

(١٤) المطلوب إيجاد سعة برميل ارتفاعه  $1\frac{1}{4}$  متروكل من قطري نهايتيه ٨٠ سنتيمترا وقطر القطاع الذي في وسط الارتفاع يساوى مترا وجميع المقاسات مأخوذة من الداخل

مع بيان السعة بالليتر والجالون

(١٥) المطلوب إيجاد سعة خوض مستقيم قطاعه على شكل ٧ وطوله  $2\frac{1}{4}$  مترا وطول كل جانب من جانبي القطاع ٢٥ سنتيمترا والزاوية الواقعة بينهما تساوى ٩٠°

(١٦) المطلوب بيان المقادير الآتية بالليتر

(١) ٣٤٧٨ قدما مكعبا

(٢) ٢٩٢ ياردة مكعبة

(٣) ٢١٧٥ بوصة مكعبة

٠ (١٧) المطلوب تحويل

(١) ١٠٠٠ ليتر الى أقدام مكعبة

(٢) ٣٤٩٨ ليتر الى أقدام مكعبة

(٣) ٦٠٠٠ متر مكعب الى ياردات مكعبة

(١٨) المطلوب تحويل المقادير الآتية الى لترات وامتحان النتيجة بتحويل النتائج ثانيا الى جالونات

- (١) ١٨ جالونا  
(٢) ٣٢٩٨ جالونا  
(٣) ٥٠٠٠٠ جالون  
(٤) ١٥ جالونا ٣٦ كورات ٦ بنت واحد  
(٥) ٥٠٠ بوشل

(١٩) المطلوب تحويل ٧٢٩ قدما مكعبا الى جالونات ثم الى لترات ثم تحويلها مباشرة الى لترات

(٢٠) المطلوب تحويل ٥٨٧٦ بوصة مكعبة الى جالونات ثم الى لترات ثم تحويلها مباشرة الى لترات

١٩٢ — وهناك جملة طرق خاصة تستعمل في الحساب العمل وذلك لأجل أن تفى بالصعوبات الناشئة عن تشعب جداول المقاييس والمكاييل الانكليزية

ومن أمثلة ذلك ما يأتي

لايجاد عدد الجالونات من الماء في اسطوانة (مثل بر) نضرب عمق الماء

بالباردة في مربع قطر الاسطوانة بالبوصة ويقسم الناتج على عشرة فالناتج هو

عدد الجالونات مقربا بقدر ٢ في المائة

واذا لم يقسم حاصل الضرب السابق ذكره على عشرة فالناتج يكون هو

ثقل الماء بالرطل

وذلك لأن الجالون من الماء يزن ١٠ أرطال

ولاثبات ذلك نقول - كمية الماء =  $\frac{ط}{٤}$  (القطر)<sup>٢</sup> × العمق

فلنفرض أن القطر = ١ بوصات

والعمق = ٤ ياردات

فالكمية =  $\frac{ط}{٤}$  (١ بوصات)<sup>٢</sup> × (٤ ياردات)

= ١ ع  $\frac{ط}{٤}$  (بوصات)<sup>٢</sup> × (ياردات)

= ١ ع  $\frac{ط}{٤}$   $(\frac{٢٢}{١٢})$  × ٣ أقدام

= ١ ع  $\frac{٢٢}{١٤٤ \times ٤}$  (أقدام)<sup>٢</sup>

= ١ ع  $\frac{٢٢ \times ٦}{١٤٤ \times ٤}$  (١ +  $\frac{١}{٣}$  +  $\frac{١}{٣٠٠}$ ) جالونا

لأن ١ (قدم)<sup>٢</sup> = ٦ (١ +  $\frac{١}{٣}$  +  $\frac{١}{٣٠٠}$ ) جالونات

وبحساب هذا الكميرى أنه يساوى  $\frac{١}{٣٠٠} \times ١٠١٩٤$  أو تقريبا

$\frac{١}{٣٠٠} (١ + \frac{١}{٣})$

واذن يكون

كمية الماء =  $\frac{١}{٣٠٠}$  ع جالونات زائدا تصحيحا قدره اثنان في المائة

ثم

نقل الماء = ١ ع بالرطل زائدا تصحيحا قدره اثنان في المائة

وهناك تطبيقات كثيرة جدا لهذه التساويات كما يظهر من الأمثلة الآتية

فإذا لم يكن الاثاء اسطوانيا فيلزم البحث عن مربع قطر الاسطوانة المكافئة له

واستعمالها في القانون فاذا أريد الحصول على الليترات بدلا من الجالونات أو الكيلوجرامات بدل الأرتال فالقانون المطلوب هو  $\frac{1}{17}$  ن أ ع ويمكن استعمال معامل التصحيح وهو  $(1 + \frac{1}{10})$  أو عدم استعماله على حسب درجة الضبط المطلوبة .

١٩٣ — والجدول الآتي النافع في الأعمال العملية قد وضع هنا للرجوع اليه اذا اقتضى الحال وقد يحتاج الى جزء منه في حل المسائل الأخيرة من المسائل المختلفة الآتية في آخر الكتاب

### جدول الأثقال

ثقل القدم المكعب بالرطل	ثقل القدم المكعب بالرطل
١٥٥ حجر رملي	٤٥٠ حديد زهر
١١٢ طوب أحمر	٤٨٠ { خد مطروق صلب إن
١٢٠ خرسانة	٤٩٦ صلب مسحوب
١٠٠ تراب	٥٢٠ نحاس أصفر
٦٢,٣ ماء (غلب)	٥٥٠ نحاس أحمر
٦٤ ماء (ملح)	٤٥ خشب

## تمريعات (٣٠)

(١) المطلوب ايجاد عدد الجالونات التى تصرف فى الساعة من ماسورة اسطوانية قطرها قدمان وهى مملوءة الى نصفها وسرعة تصرف المياه ميل واحد فى الساعة

(٢) المطلوب ايجاد عدد الجالونات التى تشتمل عليها بئر قطرها ٣٠ بوصة وعمق الماء فيها ٣٠ قدما

(٣) سعة البوشل الواحد يد اوى ٨ جالونات والميكل الرسمى للبوشل هو اسطوانة مجوفة عمقها الداخل يساوى نصف قطرها الداخل والمطلوب ايجاد كل من العمق والقطر المذكورين

(٤) المطلوب ايجاد ثقل قضيب اسطوانى من الحديد طوله ١٠ أقدام وقطره ٣ بوصات ووزنه النوعى ٧,٨

(٥) المطلوب بيان أن ثقل اسطوانة مجوفة طولها ع ياردة وقطرها الداخل والخارج هما ١ ٦ و ٢ بالبوصة يساوى بالأرطال

$$ع \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \times \text{الوزن النوعى للسادة}$$

وان معامل التصحيح لهذه الكمية هو  $\left( 1 + \frac{1}{16} \right)$  وتطبيق هذا القانون لثمين وزن القضيب فى مسألة ٤ بفرض أنه مجوف وأن قطر التجويف يساوى ٢ بوصة

(٦) حجم أى جسم ناقص يساوى ارتفاعه مضروباً فى قطاعه العرضى المتوسط المساوى للقطاع العرضى للأسطوانة المساوية له فى الارتفاع والحجم (المسماة بالأسطوانة المكافئة) ومن هنا يطلب بيان أن

$$\frac{4}{\pi} \times \text{مربع قطر الأسطوانة المكافئة} = \text{القطاع العرضى المتوسط} \times \frac{4}{\pi}$$

(٧) المطلوب بيان أنه في حالة المخروط الناقص والقطعة الكروية الناقصة يكون مربع قطر الاسطوانة المكافئة مساويا الى

$$\frac{1}{4} (u^2 + 4v^2 + w^2)$$

وفي هذا القانون  $u$   $v$   $w$  هما قطر القاعدتين  $6$   $u$  هو قطر القطاع المتوسط الموازي للقاعدتين

(٨) المطلوب بيان أنه في حالة الكرة التي قطرها  $u$  يكون مربع القطر للأسطوانة المكافئة  $\frac{2}{3} u^2$  (ومن الواضح أن ارتفاع الأسطوانة يساوى أيضا  $u$ )

ومن ثم يبان أن الثقل بالرطل لكرة من الماء عدد اليارات التي يشتمل عليها  $u$  مضروبا في  $\frac{2}{3}$  عدد مربع البوصات المشتمل عليها  $u$  ومعامل التصحيح هو  $(1 + \frac{1}{16})$

(٩). المطلوب تعيين حجم كرة قطرها قدم واحد (أولا) اذا كانت كثافتها مساوية لكثافة الماء (ثانيا) اذا كانت من الحديد الذي كثافته تساوى  $7.8$

(١٠) المطلوب إيجاد عدد الجالونات التي تشتمل عليها سعة دلو شكله مخروط ناقص ارتفاعه  $10\frac{1}{4}$  بوصات وقطر قاعدتيه  $11$   $6$  بوصات على التناظر وجميع المقاسات مأخوذة من الداخل

(١١) المطلوب إيجاد عدد الجالونات التي تشتمل عليها سعة برميل لخزن ماء الأمطار ارتفاعه  $4$  أقدام وقطره الداخلان للقاعدتين  $30$  بوصة وقطره في وسط ارتفاعه  $3$  أقدام

(١٢) إذا كان برميل سعته ٩ جالونات وقطره الداخلى الأعلى ١٢ بوصة وقطره فى وسط ارتفاعه ١٤ بوصة فالمطلوب إيجاد الارتفاع الداخلى للبرميل

(١٣) إذا استعمل محيط الاسطوانة المكافئة بدلا من القطر وكان طول المحيط م بالبوصة والارتفاع ع بالياردة فالمطلوب بيان أن عدد الجالونات

$$= \frac{2.6}{1.1} \left( 1 + \frac{1}{3} \right)$$

[بملاحظة أن  $1 = \left( \frac{2}{1} \right)^2 = \frac{1}{1} = 1 \times 1.0321$ ]

(١٤) فى المسألة السابقة المطلوب بيان أن  $\frac{2.6}{1.1} \left( 1 + \frac{1}{3} \right)$  يعطى عدد الليترات ومن هذا المقدار مضروبا فى الوزن النوعى للجسم يعطى الوزن بالكيلوجرام

(١٥) خامود منشأ من الحجر بشكل أسطوانى ارتفاعه ١٠ أقدام ومحيطه ٤٠ بوصة فما ثقله بفرض أنه منشأ من حجر كثافته ٢.٨

(١٦) بركة على شكل مخروط ناقص عمقها ٤ أقدام ومحيطها ١٠٠ قدم من أعلى و ٣٠ قدما من أسفل فما سعته بالجالون

(١٧) إذا كان القطاع العرضى لاسطوانة أو منشور = ٢ بوصة مربعة وارتفاعها يساوى ع ياردات فالمطلوب بيان أن السعة بالجالون

$$= \frac{1.3}{1.1} \text{ ع وان تلك السعة بالليتر تساوى } \frac{1.3}{1.1} \text{ ع} = \left( \frac{1}{1.1} + \frac{1}{3} \right) \text{ ع}$$

(أنظر مسألة ٦)

(١٨) المطلوب إيجاد ثقل كتلة من الخشب طولها ٢٠ قدما وقطاعها العرضى مستطيل مساحته  $20 \times 10$  بوصة مربعة مع فرض أن الوزن النوعى للخشب ٨٠.



(١٩) المطلوب إيجاد ثقل جسم ناقص من الحجر ارتفاعه ١٠ أقدام وقاعدته السفلى مستطيل بعده ١٥ قدما  $\times$  ١٠ أقدام وقاعدته العليا مستطيل بعده ٨ أقدام  $\times$  ٥ أقدام والوزن النوعي للحجر = ٢٨

(٢٠) المطلوب إيجاد ثقل قدم مكعب من الحديد الذي وزنه النوعي ٧٨

(٢١) المطلوب إيجاد ثقل مخروط مخوف من الحديد ارتفاعه قدمان والقطر الداخل والخارج لقاعدته يساويان ١٨ بوصة و ١٥ بوصة على التناظر وسمك الحديد واحد في المخروط جميعه

تنبيه — يجب تعيين ارتفاع التجويف المخروطي والمخروط المخوف هو الفرق بين مخروطين مصمتين

## مسائل مختلفة

- ( ١ ) المطلوب إيجاد عدد الأمتار المربعة التي يشتمل عليها متوازي أضلاع ضلعه الأطول يساوى ٦٩ مترا وضلعه الأقصر يساوى ٥٢ مترا وقطره الأقصر يساوى ٢٩ مترا
- ( ٢ ) مخروط طول محيط قاعدته ٢٢ مترا ورأسه  $\frac{3}{8}$  ٤ أمتار والمطلوب إيجاد عدد الأمتار المكعبة التي يشتمل عليها بفرض أن  $\pi = \frac{1}{7}$  ٣
- ( ٣ ) إذا فرض أن القدم المكعب من الماء يزن ١٠٠٠ أوقية وأن البنت منه يزن رطلا وربما فـا عدد البوصات المكعبة في الجالون
- ( ٤ ) المطلوب البرهنة على أن سهم أى قوس دائرى يساوى مربع وتر نصفه مقسوما على قطر الدائرة
- ( ٥ ) المطلوب إيجاد مساحة المثلث الذى أضلاعه ١٧ مترا و ٢٨ مترا و ٣٩ مترا
- ( ٦ ) ما مقدار القماش اللازم لإنشاء خيمة مخروطية الشكل ارتفاعها ٤ أمتار وقطر قاعدتها ٢,٥٠ متر
- ( ٧ ) إذا كان قهل الفحم يزيد عن قهل الماء بقدر الربع فما قهل الyarدة المكعبة منه بالرطل إذا كان قهل المتر المكعب من الماء ١٠٠٠ كيلوجرام
- ( ٨ ) مكعب من المعدن ضلعه ٠,١٤ متر صهر وصب في شكل مخروط قائم ارتفاعه ٠,٥٠ مترا فالمطلوب معرفة نصف قطر القاعدة
- ( ٩ ) دائرة نصف قطرها ٦ أمتار تمس الضلعين المتساويين من مثلث متساوى الساقين في نهايتهما فإذا كان طول كل ضلع منهما ٨ أمتار فما طول القاعدة

(١٠) صندوق ذو غطاء مصنوع من خشب سمكه  $٠,٣٧٥$  متر فاذا كان  
مقاس كل ضلع من أضلاعه الخارجية  $١,٠٥$  متر فالمطلوب إيجاد مسطح  
الخشب المستعمل في الانشاء بالضبط

(١١) برج دائرى قطره الداخلى  $٥$  أمتار وسمك حائطه  $٠,٧٠$  متر فما  
مسطح أرض قاعدة حائطه

(١٢) ما طول مواسير الحديد التى يبلغ وزنها طونولاً واحدة اذا كان  
قطرها الداخلى  $٠,٧٥$  متر وسمكها  $٠,٠٢٢٥$  متر وثقل السنتيمتر المكعب  
من الحديد  $٧,٨٠$  جرامات

(١٣) نصفاً قطرى نهايتى مخروط ناقص دائرى قائم هما  $٥$  أمتار  $٨٦$  أمتار  
وطول الراسم  $٤$  أمتار فاذا قسم المخروط الناقص المذكور الى مخروطين ناقصين  
متساويين فى السطح الجانبي فما طول راسم كل واحد منهما

(١٤) غرفة طولها  $٨,٥٠$  أمتار وعرضها  $٦$  أمتار وارتفاعها  $٤,٨٠$  أمتار  
زنحفت بورق عرضه  $٠,٧٨$  متر وثمان المتر الطولى منه  $٦٥$  ملاباً فما ثمن هذا  
الورق اللازم

(١٥) حقل مربع مساحته  $٤$  قراريط و  $٨$  أفدنة فما ضلعه وما قطره

(١٦) مثلث قائم الزاوية ضلعاً زاويته القائمة  $١٨٥$  متراً  $٦$   $٨٤$  متراً  
والمطلوب إيجاد الفرق بين مساحته ومساحة نصف الدائرة المرسومة على وتره

(١٧) متوازى مستطيلات قاعدته مربع وارتفاعه  $١$  متر وحجمه  
 $١,١٢٥$  متر مكعب فما ضلع مربع القاعدة

(١٨) المطلوب إيجاد حجم مخروط دائرى ارتفاعه  $٤,٥٠$  أمتار ومحيط  
قاعدته  $٤,٨٠$  أمتار

- (١٩) اسطوانة قطرها ٠,٩ متر وطولها ١,٥ متر مقفلة من طرفيها بنصفى كرة المطلوب ايجاد السطح الكلى والحجم الكلى لهذا الجسم
- (٢٠) طريق طوله ٨ كيلومترات وعرضه ٢٠ مترا فما مسطح أرضه بالفسدان
- (٢١) اذان كان القدم المكعب من الماء وزن ١٠٠٠ أوقية انكليزية والجالون منه وزن عشرة أرطال انكليزية فالمطلوب ايجاد عمق وعاء اسطوانى قطره ١١ بوصة ويسع  $4\frac{1}{4}$  جالونات بحيث يكون الناتج مضبوطا الى جزء من مائة من البوصة
- (٢٢) كرة معدنية حجمها ٠,١٣٥ متر مكعب فما مساحة سطحها
- (٢٣) مخروط ناقص قطرا قاعدتيه ٤,٨٠ أمتار و ٣,٦٠ أمتار على التناظر وارتفاعه ١٥,٠ متر فما حجمه
- (٢٤) اذا كان الطول البالغ ٨٠٠ متر يساوى خمسة أميال والمكعب الذى ضلعه ستة أقدام وزن ٦ أطنان والمتر المكعب من المادة نفسها وزن ١٠٠٠ كيلو جرام فالمطلوب ايجاد النسبة بين الكيلو جرام والرتل الانكليزى
- (٢٥) المطلوب ايجاد قطر الدائرة التى حجمها متر مكعب واحد مقربا الى جزء من مائة من المليمتر
- (٢٦) مخروط ناقص ارتفاعه ٢٨ مترا وقطر احدى نهايتيه ٣ أمتار وقطر للنهاية الأخرى ٢,٣٠ متر والمطلوب ايجاد حجمه بالمتر المكعب بحيث يشتمل الناتج على ثلاثة أرقام اعشارية
- (٢٧) مخروط ارتفاعه ٦٠ مترا وزاوية ميل رأسه على الأفق ٣٠ درجة فما حجمه وما مساحة سطحه المنحنى

(٢٨) المطلوب إيجاد حجم مخروط ناقص ارتفاعه ١,٢٠ متر ونصف قطري قاعدتيه ٣,٠ متر ٦,٩٠ متر على التناظر وإيجاد مقدار زاوية رأس المخروط التام وارتفاعه

(٢٩) المطلوب بيان حجم وسطح كرة نصف قطرها ٢,٢٥ متر

(٣٠) ارتفاع مخروط ناقص يساوى ٤٠ مترا ونصف قطري قاعدتيه ٢٥ مترا ٦٠ مترا على التناظر والمطلوب إيجاد حجمه ومساحة سطحه المنحني

(٣١) المطلوب إيجاد حجم المخروط التام في المسألة السابقة

(٣٢) المطلوب إيجاد مساحة السطح المنحني لكرة حجمها ١٢٠ مترا مكعبا

(٣٣) اذا كان ثمن الألف طوبة من الطوب الأحمر الذى مقاسه ٢٤,٠ متر  $\times$  ١٢٠,٠ متر فى ٥,٠ متر يساوى ١٢٠ قرشا فما ثمن الطوب الداخلى فى حائط طولها ٤٠ مترا وسماها ٣٦٠,٠ متر وارتفاعها ٢,٤٠ متر

(٣٤) المطلوب إيجاد حجم هرم مثلى ارتفاعه ٣,٦٠ أمتار وأضلاع قاعدته هى على التناظر ٩٠,٠ متر ١,٢٠ متر ١,٥٠ متر

(٣٥) المطلوب إيجاد سطح عوامة مجوفة من الحديد مكوّنة من مخروط ونصف كرة اذا كان قطر الكرة ٩٠,٠ مترا والارتفاع الكلى للعوامة ١,٥٠ متر

(٣٦) المطلوب وضع قاعدة لحساب السطح المنحني لمخروط قائم واقامة البرهان على ذلك

(٣٧) حقل على شكل شبه منحرف ضلعاؤه المتوازيان ٢٠٠ متر ٣٤٠,٦ مترا والبعد العمودى بينهما ١٥٠ مترا فما مساحة هذا الحقل

(٣٨) المطلوب إيجاد حجم مخروط ناقص قائم نصف قطري قاعدتيه هما على التناظر ٣,٦٠ أمتار ٢,٤٠ متر والبعد العمودى بينهما ٣ أمتار

(٣٩) المطلوب حساب السطح المنحني للمخروط الناقص المذكور  
 (٤٠) ثقل ديسيمتر مكعب من الماء يبلغ كيلو جراما واحدا والوزن النوعي  
 للزئبق ١٣,٦٠ فما ثقل الزئبق الذي تشتمل عليه كرة قطرها ٥ سنتيمترات  
 (٤١) ارتفاع مخروط ناقص قائم يساوى ١٧ سنتيمترا ونصفا قطري  
 قاعدته  $\frac{3}{4} \times 6$  سنتيمترا والمطلوب إيجاد حجم المخروط التام ومساحة  
 سطحه المنحني

(٤٢) إذا كان ارتفاع المخروط القائم الناقص مساويا ه ونصفا قطري  
 قاعدته ب ٦ سم فالمطلوب إيجاد نصف قطر القطاع ( الموازي لقاعدته )  
 الذى ينصف الحجم X وبيان أن بعد هذا القطاع عن القاعدة الكبرى هو

$$\frac{h}{b - b'} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{b'^2 + b^2}{2} \right) - b' \right]$$

(٤٣) المطلوب إيجاد مساحة سطح كرة نصف قطرها ٠,٨٠ مترا ووزن  
 الماء المشتملة هي عليه إذا كان ثقل ديسيمتر مكعب من الماء يعادل كيلوجراما  
 واحدا

(٤٤) مثلث قائم الزاوية أضلاعه ٥ سنتيمترات ٦ سنتيمترا ١٣  
 سنتيمترا يدور حول وتره والمطلوب إيجاد الحجم المتولد من ذلك الدوران

(٤٥) المطلوب إيجاد سمك كرة مجوفة من الحديد قطرها الخارج ٠,٣٠ متر  
 وثقلها يساوى ثقل كرة مساوية لها من الماء مع العلم بأن كثافة الحديد ٧,٨

(٤٦) المطلوب إيجاد حجم هرم قاعدته وأوجهه جميعها مثلثات متساوية  
 الأضلاع طول كل ضلع من أضلاعها متر واحد

(٤٧) المطلوب إيجاد حجم خابور قاعدته مستطيل ٠,٥٠ متر × ١,٠٠ متر  
 وطول ضلعه الأعلى يساوى ٠,٨٠ متر وارتفاع الخابور ٠,٢٢ متر

(٤٨) اذا كانت مساحة السطح المنحني لمخروط ١٨ مترا مربعا و سطح قاعدته ستة أمتار مربعة فما حجمه

(٤٩) نصف قطر أسطوانة يساوى  $٣٠ +$  س وارتفاعها ه ونصف قطر أسطوانة أخرى يساوى  $٣٠ +$  س وارتفاعها ه + س والاسطوانتان متساويتا الحجم فالمطلوب اثبات أن  $س = ٣٠$  (بـ - ٢ ه) ÷ ه

(٥٠) المطلوب إيجاد مساحة قطعة دائرية محصورة في زاوية مركزية قدرها  $٣٢\frac{1}{4}^\circ$  ونصف قطر الدائرة ٢٤٠ مترا

(٥١) طريق عرضه ١٠ أمتار يحيط بمرج من الحشيش شكله دائري قطره ٨٠ مترا فما الطريق بالفدان وكسوره

(٥٢) مخروط مجزؤا ارتفاعه ٠,٥ متر ونصف قطر قاعدته ٠,٣ متر فما مقدار ثقل الزئبق الذى يمكن أن يشتمل عليه مع العلم بأن ثقل السنتيمتر المكعب من الزئبق يساوى ١٣,٦٠ جراما

(٥٣) مساحة دائرة عظيمة من الكرة تساوى متربعا فما حجم الكرة

(٥٤) المطلوب إيجاد مساحة السطح الكلى لمخروط ناقص نصف قطر به الأعلى والأسفل ٤ سنتيمترات ٦ ٩ سنتيمترات وارتفاعه ١٢ سنتيمترا

(٥٥) المطلوب إيجاد (١) المساحة (٢) المحيط لقطعة دائرية نصف قطرها ١٠ أمتار وسهمها ٥ أمتار

(٥٦) هرم ارتفاعه ٠,٨٠ متر قاعدته مستطيلة ٠,٩ × ٠,١٠ متر قطع منه خابور ارتفاعه ٠,٠٤ متر بمستو مار بأحد الضلعين الطويلين بين القاعدة والمطلوب إيجاد حجم الهرم والخابور

(٥٧) المطلوب إيجاد حجم خزان عمقه ٢٠ مترا ومساحة قاعدته العليا ٦٠ × ٤٠ مترا وأضلاعه تميل الى الداخل بنسبة واحد أفقى الى اثنين رأسى

(٥٨) سهم قطعة كروية يساوى ٦ أمتار ومحيط قاعدتها ٢٠ مترا والمطلوب إيجاد السطح الكروي لتلك الكرة وحجمها

(٥٩) كرة مجوفة قطرها الخارج ٠,١٤ متر وقطرها الداخل ٠,١٢ متر أخذ من نهايتي قطر واحد قطعتان كرويتان سمك كل منهما سنتيمتر واحد والمطلوب إيجاد حجم الجسم الباقي وسطحه الخارجى المنحنى

(٦٠) ما كيفية تدريج كأس من الزجاج شكله على شكل مخروط مجوف بحيث يقاس به أعشار اللترات اذا كانت طول الراسم الداخل ٢٠ سنتيمترا وحجمه الكلى لتر واحد

(٦١) المطلوب إيجاد مساحة شبه منحرف  $ABCD$  ضلعا  $AD$  و  $BC$  متوازيان وعلى بعد ٣٠ متر وطول الضلع  $AB$  يزيد عن  $AD$  بمتر ٢٠ متر ومساحة المثلث  $ABC$  ١,١٠٠ مترا مربعا

(٦٢) مستطيل عرضه ٦ سنتيمترات مرسوم في نصف دائرة قطرها ١٢ سنتيمترا والمطلوب إيجاد مساحة المستطيل ومساحة الأجزاء الباقية من نصف الدائرة الخارجة عن المستطيل

(٦٣) مخروط ارتفاعه ١٨ سنتيمترا ونصف قطر قاعدته ٦ سنتيمترات موضوع على نصف كرة نصف قطرها هو نصف قطر قاعدة المخروط والمطلوب إيجاد حجم ذلك الجسم

(٦٤) قبة مجوفة شكلها على شكل قطعة كروية سهمها ٦ أمتار وقطر القاعدة ٨ أمتار والمطلوب إيجاد الحجم والسطح

(٦٥) المطلوب إيجاد حجم خابور بعد أحرقه المتوازية ٢٥ ٦ ٢٥ ١٤ سنتيمترا وأطوالها ١٢ سنتيمترا ١٦ ٦ سنتيمترا ٢٠ سنتيمترا على التناظر



(٦٦) المطلوب إيجاد حجم هرم ناقص قاعدته المتوازيان مثلثان متشابهان مساحتهما ٥٠ ٦ ١٨ مترا مربعا على التناظر وارتفاع الهرم ٦ أمتار

(٦٧) اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها ١٥ سنتيمترا قطعت منها قطعة بمستوي بعده الأصغر عن القاعدة ١٠ سنتيمترات وبعدة الأكبر ١٦ سنتيمترا والمطلوب إيجاد حجم القطعة

(٦٨) المطلوب إيجاد مساحة السطح المنحني لتلك القطعة

(٦٩) دائرة نصف قطرها ٥ أمتار أخذت نقطة على محيطها مثل و ورسم منها وتران متساويان و ١ ٦ و ب طول كل منهما ٦ أمتار والمطلوب إيجاد الزاوية ١ و ب وطول القوس ١ و ب

(٧٠) قطعة مستطيلة من أرض عرضها ٢ طولها محاطة بطريق عرضها ٣ أمتار وقد وجد أنه يلزم ١٠ أمتار مكعبة من الحصى لرفع الطريق بطبقة سمكها ٥٠ سم. متر والمطلوب إيجاد أبعاد تلك القطعة

(٧١) مثلث قائم الزاوية أضلاعه على التناظر ٣ ٦ ٤ ٥ أمتار قسم الى جزأين بعمود نازل من الزاوية القائمة على الوتر والمطلوب حساب مساحة المثلث الكلي والمثلثين الصغيرين

(٧٢) المطلوب إيجاد مساحة خمس منتظم مرسوم في دائرة نصف قطرها يساوي ٣٠٠ متر

(٧٣) المطلوب إيجاد حجم الكرة التي سطحها ٢٥٠٠ متر مسطح

(٧٤) المطلوب إيجاد الجزء المنظور من كرة نصف قطرها ٢٠ مترا اذا نظرت من نقطة على بعد ١٠ أمتار من سطحها

(٧٥) أسطوانة نصف قطر قاعدتها ٣٠ مترا مثقوبة تقبا أسطوانيا نصف قطره ٢٠ مترا مختلفا جميع طولها بحيث يكون محورا الأسطوانتين متوازيين ومتباعدين بقدره ٤٥ أمتار ثم قطع جزء من الأسطوانة بمستوى مائل على مستوى القاعدة بقدره ٤٥° ويقطع المستوى المذكور في خط يمر من القاعدة في نقطة و مع العلم بأن نصف قطر القاعدة المار بنقطة و مائل بزاوية قدرها ٦٠° على نصف القطر المار بمركز الثقب والمطلوب إيجاد حجم الجسم المقطوع بالمستوى

(٧٦) مربع مكوّن من امتداد الأضلاع المتبادلة من ممن متظم ومربع آخر مكوّن من وصل نقط الزوايا المتبادلة من المثلث والمطلوب إيجاد النسبة بين مساحتي المربعين

(٧٧) المطلوب إيجاد مساحة المثلث الذي أضلاعه ١٠٠٦ ١٠٠٦ ١٠٠٦ متر وإيجاد نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوى مساحة هذا المثلث

(٧٨) هرم قاعدته مربعة وطول كل حرف من أحرفه المائلة يساوى ٧٠٦ مترا وطول كل ضلع من أضلاع القاعدة ٥٤٤ ٢٧ متر والمطلوب إيجاد حجم الهرم وزاوية ميل أحد أحرفه على القاعدة

(٧٩) مئمن مكوّن بوصل نهايتي كل ضلع من أضلاع مربع معلوم الى منتصف الضلع المقابل له والمطلوب إيجاد مساحة المئمن المذكور بفرض أن ضلع المربع يساوى ١٠ سنتيمترات

(٨٠) المطلوب إيجاد طول قوس دائرة طول وتره ١٠٠ متر والزاوية الواقعة بين المماسين من نهايتيه ٢٣٤°

(٨١) الضلعان المتوازيان من شبه منحرف هما ١٥٠ مترا ١٠٠٦ متر على التنظر والزوايتان اللتان على نهايتي الضلع الأول ٤٥° ٦٠° والمطلوب إيجاد المساحة

(٨٢) تمثال الملك من ملوك المصريين يزن ٥٠ طونولاته وهو مصنوع من مادة كثافتها أثقل من كثافة الجسم البشري بقدر ٢,٧ مرة فإذا كانت جثة انسان طوله ١٧٦ سنتيمترا ومشابهة للجسم المذكور يبلغ ثقلها ٦٣ كيلوجراما فما طول التمثال

(٨٣) قاعدة خزان على شكل مستطيل أنقى ٦٠ مترا  $\times$  ٤٠ مترا وميل جوانبه بمقدار واحد أفقى الى اثنين رأسى فإذا كان فيه ماء عمقه عشرون مترا فما حجم ذلك الماء

(٨٤) أضلاع مثلث تساوى ٩٢٣ مترا ١٠٧٥ ٦ مترا ٦ ١٢٣٤ مترا والمطلوب حساب (١) نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (٢) طول أحد أضلاع المثلث المشابه للثالث السابق والمرسوم داخل الدائرة

(٨٥) المطلوب إيجاد مساحة نجس منتظم مرسوم على دائرة نصف قطرها ٢٠٠ مترومساحة المثلث المكوّن بوصل إحدى زوايا الخمس الى زاويتين غير مجاورتين لها

(٨٦) المطلوب إيجاد حجم كرة نصف قطرها ١٠٠ متر وحجم القطعة الصغرى التى تتكوّن بمستو منصف لنصف القطر بالتعامد وما حجم القطعة المأخوذة بنفس الكيفية من كرة أخرى نصف قطرها ٣٠ مترا

(٨٧) الأحرف الثلاثة المتوازية من خابور أطوالها ٧٠ مترا ٦ ١١٠ مترا ٦ ١٢٠ مترا وحجم الخابور ٩٠,٠٠٠ متر مكعب والمطلوب إيجاد مساحة قطاعه العرضى المأخوذة بالتعامد على هذه الأحرف المتوازية وإذا كانت الأحرف هي ١ ب ٦ ح ٦ د ٦ ف فالمطلوب إيجاد حجم الهرم الذى رأسه فى نقط ١ وقاعدته الشكل الرباعى ح د و ف ٦

(٨٨) المطلوب إيجاد حجم مخروط ناقص نصف قطر قاعدتيه ٢ متر ٣ ٦ أمتار على التناظر وارتفاع المخروط ٧ أمتار .

(٨٩) ١ ب ح هو مثلث قسم منه الضلع ١ ب الى ثلاثة أقسام متساوية بنقطتي ١ ب ٦ ك وأطوال الأضلاع ١ ب ٦ ب ٦ ح ٦ هـ على التناظر ٦٤ ٨٥ ٦ ٥٣ مترا والمطلوب إيجاد مساحة الأجزاء التي ينقسم اليها المثلث بخطين مارين من ٦ ك موازيين الى ١ ب ح

(٩٠) المطلوب إيجاد حجم كرة مقربا الى سنتيمتر واحد اذا كان محيط دائرة عظيمة فيها مساويا ٣,٨٦٢ أمتار

(٩١) عشرون كتلة من الخشب الاسطوانى طول كل واحدة منها ٢ أمتار وقطر كل قطعة ٤٥ سنتيمترا يراد نشرها الى قطع بحيث يكون سمك كل قطعة بعد النشر ٠,٠٧٥ متر وأن يكون بعد أول خط وآخر خط من خطوط النشر عن خارج المحيط يساوى ٣,٧٥ سنتيمتر والمطلوب إيجاد تكاليف النشر اذا كانت أجرة نشر المتر المربع الواحد ٢٥ ملثما

(٩٢) مضلع منتظم ذو خمسة أضلاع مرسوم على دائرة نصف قطرها ٥ أمتار والمطلوب إيجاد (١) الضلع مضبوطة لغاية الرقم الاعشارى الثالث من لمترب المساحة

(٩٣) نصف قطر دائرة يساوى ١٠ أمتار ووتر أحد أقواسها يساوى ٧ أمتار والمطلوب إيجاد وتر نصف القوس

<sup>٢</sup> (٩٤) الوزن النوعى لمادة صنع منها صندوق مكعب الشكل يساوى ٨ وكل من جوانبه وقاعه وغطائه متساوية السمك وطول الضلع الخارج للصندوق ١,٢٥ متر وقد وجد أنه يزن بالضبط وزن مكعب مصمط مساو له في الحجم ومن مادة وزنها النوعى يساوى واحدا والمطلوب إيجاد سمك الصندوق

(٩٥) طول نصف قطر دائرة = ٣ أمتار أخذ فيها وتر  $ا ب$  طوله يساوى مترين ورسم من نقطتي  $ا$   $ب$  مماسات  $ا د$   $ب و$  والمطلوب إيجاد  $ا د + ب و - ا ب$  مقربا الى ثلاثة أرقام أعشارية

(٩٦)  $ا ب$  و  $ا د$  و  $ب و$  هي أضلاع مكعب ورسم مستو مار بالنقط  $ا$   $ب$   $و$  والمطلوب حساب النسبة بين الجزأين اللذين ينقسم اليهما قطر المكعب المار بنقطة  $و$

(٩٧) هرم منتظم قاعدته المربع  $ا ب و د$  ورأسه نقطة  $هـ$  طول كل ضلع من قاعدته ١٠ أمتار ونقطة  $و$  تبعد عن القاعدة بقدر ١٥ مترا وقطع الهرم بمستو مار من نقطتي  $ح$   $د$  وبنقطتي منتصف  $ا ب$  و  $ب و$  والمطلوب إيجاد حجمي الجزأين اللذين ينقسم اليهما الهرم المذكور

(٩٨) نصف قطر قطاع دائري يساوى ٣ أمتار ومساحته جزء من ألف من المتر المربع فما عدد الثواني التي تشتمل عليها زاويته

(٩٩) اذا علمت أضلاع شكل رباعي وزاوية من زواياه فالمطلوب بيان كيفية حساب مساحته

ولنفرض أن أضلاعه هي  $ا = ٢٦٠$   $ب = ٣١٠$   $ح = ٢١٠$   $د = ٣٣٠$  مترا وأن الزاوية التي بين  $ا$   $ب = ٩٠^\circ$  والمطلوب حساب المساحة بالمتر المربع

(١٠٠) المطلوب إيجاد النسبة بين مساحة المربع المرسوم في دائرة وبين مساحة المربع الذى ضلعه يساوى ربع محيط تلك الدائرة

واذا فرض أن  $ر = ١٠$  أمتار فالمطلوب حساب الفرق بين مساحتي المربعين مقربا الى ستينمتر مربع

(١٠١) اذا انطبق محور اسطوانة على محور مخروط وكانا متساويين في الحجم فالمطلوب حساب النسبة بين جزء الاسطوانة الخارج عن المخروط الى الحجم الكلي للأسطوانة

(١٠٢) زاوية من زوايا متوازي أضلاع تساوى ٣٠° والنسبة بين الضلعين المحيطين بالزاوية كنسبة ٣ الى ٤ والمساحة ١٧٣٤ مترا مربعا والمطلوب إيجاد الأضلاع

(١٠٣) ٦ ا ٦ ب ٦ ج ٦ د ٦ هـ ٦ و هي على الترتيب رؤوس زوايا  
مسدس منتظم مرسوم في دائرة فاذا جعلت نقطة و مركزا ونصف قطر  
و ب رسمت دائرة فالمطلوب إيجاد مساحة الجزء من الدائرة الأولى الخارج عن  
الدائرة الثانية واذا كان نصف قطر الدائرة الأولى ١٠ أمتار فالمطلوب إيجاد  
هذه المساحة مقربة الى سنتيمتر مربع واحد

(١٠٤) اذا كانت نقطة  $\alpha$  رأس زاوية من مكعب وأخذت على الأضلاع التي تتقابل في هذه الزاوية ثلاث نقط  $\beta, \gamma, \delta$  بحيث تكون الأطوال  $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta$  متساوية وكان حجم الهرم  $\alpha\beta\gamma\delta$  يساوى  $\frac{1}{48}$  من حجم المكعب فالمطلوب بيان أن نسبة مساحة المثلث  $\beta\gamma\delta$  الى مساحة أحد أوجه المكعب كنسبة  $\frac{3}{8}$  الى  $1$

(١٠٥) مساحة مثلث تساوى ربع المربع المنشأ على ضلعين من أضلاعه  
 ح<sup>٦</sup> ب والمطلوب البرهنة على أن الضلع الثالث يلزم أن يساوى أحد  
 مقدارين يرمز لهما بالرمزين ح<sup>٦</sup> ب ثم بيان أن

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

(١٠٦) معلوم من المثلث  $١$  ب ح الضلع  $١ = ١٢٣٥$  مترا  $٦$  ب  
 $٣٠^\circ ١٠' ٢٤''$   $٦$  ح =  $٣٠^\circ ٣٢' ٥٤''$  والمطلوب حساب طول  $٦$  ح  
 ونسبة نصف قطر الدائرة الداخلة الى نصف قطر الدائرة التي تمس الضلع  $١$   
 وامتداد الضلعين  $٦$  ح

(١٠٧) رسم مماس من نقطة  $١$  للدائرة نصف قطرها  $٦$  سنتيمترات  
 وأخذت نقطة مثل  $٧$  على المماس بعيدة عن  $١$  بقدر ثمانية سنتيمترات  
 والمطلوب إيجاد بعد نقطة  $٧$  عن أقرب نقطة لها من محيط الدائرة

(١٠٨) قسم سطح دائرة معلومة الى قسمين بقوس مثل  $١$  ب مركزه  
 نقطة  $م$  على محيط الدائرة المعلومة فإذا كان التقدير الدائري للدائرة  
 $١ م ب = ٣٠^\circ ١١' ١٠''$  فالمطلوب إيجاد مساحتي الجزأين وامتحان الحالة حينما تكون  
 الزاوية  $١ م ب = ٣٠^\circ ١١' ١٠''$

(١٠٩) المطلوب إيجاد حجم الماء الذي يملأ حوضا طوله  $٦$  أمتار وعرضه  
 متران وعمقه  $٣$  أمتار وقطاع الحوض قطع مكافئ

(١١٠) المطلوب إيجاد حجم عوامة مصنوعة من القطعة الكبرى من كرة  
 وغروط قائم مماس للكرة في محل الاتصال بفرض أن الطول الأكبر للعوامة  
 $= ١ + ٢$  ب وقطر الكرة يساوي  $١٢$

(١١١) المطلوب إيجاد مساحة قطعة من قطع مكافئ محددة بوتر عمودي  
 على المحور بفرض أن طول الوتر يساوي ستة أمتار وبعده عن الرأس يساوي  
 $٣$  أمتار ثم إذا دارت القطعة المذكورة حول محورها فالمطلوب إيجاد حجم  
 الجسم المتولد

(١١٢) المطلوب إيجاد مقدار الزاوية التي رأسها في مركز الجسم ذي الأربعة  
 الأوجه الثلاثية المنتظم والمقابلة لأحد أحرفه

(١١٣) إذا كان مخروط ناقص مرسومًا على كرة فالمطلوب اثبات أن نصف قطر الكرة وسط متناسب بين نصفي قطري المخروط الناقص

(١١٤) المطلوب إيجاد الحجم والسطح المنحني للمخروط الناقص السابق ذكره إذا كان نصف القطرين ٣ أمتار و ٦ أمتار على التناظر

(١١٥) المطلوب البرهنة على أن القطاع الواقع في وسط ارتفاع مخروط ناقص نصفًا قطري قاعدتيه  $6$  و  $6$  و القطاع المتوسط هما على التناظر أقل من المتوسط الحسابي للقاعدتين بمقدار مساحة القطاع الواقع في وسط كرة قطرها يساوي الفرق بين  $6$  و  $6$  و القطاع المتوسط لها

(١١٦) ثقب في كرة ثقب اسطوانى ماز بمرکزها بحيث يشغل هذا الثقب نصف حجمها والمطلوب إيجاد النسبة بين قطر الثقب وقطر الكرة

(١١٧) مثلث معلوم فيه  $1 = 6250 = 616240 = 67248$  والمطلوب إيجاد مقدار الزاويتين  $6$  و  $6$  و بيان ما إذا كان يمكن أن يكون لكل منهما أكثر من مقدار واحد

(١١٨) خزان ماء طوله ٦ أمتار وعرضه ٥ أمتار ويسع ٥٠٤٠٠ طوبة أبعاد كل منها ٠,٢٢٥ مترًا طولًا و ٠,٠٧٥ مترًا سمكًا و ٠,١٠ مترًا عرضًا فما مقدار ما يسعه من الماء بالتر المكعب

(١١٩) خزان مكشوف أبعاده الخارجية ٦ أمتار طولًا وخمسة أمتار عرضًا وعمقه ٢,١٠ متر بنى أرضه وجوانبه بالطوب لسمك ٠,٣٠ مترًا وملىء ماء والمطلوب إيجاد ثقل الخزان ومحتوياته إذا كان البناء بالطوب يزيد عن ثقل حجم مساو له من الماء بقدر النصف



(١٢٠) طول ضلعي مثلث يساوى مترا واحدا و  $\sqrt{2}$  متر على التناظر والزاوية المقابلة للضلع الأصغر تساوى  $90^\circ$  والمطلوب البرهنة على أن هناك مثلثين بهذه الصفة وإيجاد زواياهما وبيان أن نسبة مساحة أحدهما إلى الآخر كنسبة  $\sqrt{2} + 1 : \sqrt{2} - 1$

(١٢١) المطلوب إيجاد ثقل صندوق ذى غطاء مصنوع من الخشب سمكه  $0.18$  مترا وأبعاده الخارجية  $1.20$  متر  $\times$   $0.90$  متر  $\times$   $0.90$  متر مع العلم بأن ثقل المتر المكعب من الخشب يساوى  $615$  كيلو جراما

(١٢٢) حلقة قطرها  $0.25$  متر معلقة من نقطة ارتفاعها عن مركزها  $0.30$  متر بواسطة ستة خيوط متساوية الطول مربوطة في محيطها على أبعاد متساوية من بعضها والمطلوب إيجاد جيب تمام الزاوية المحصورة بين خيطين متجاورين

(١٢٣) المطلوب إيجاد مساحة مضلع منتظم عدد أضلاعه  $n$  مرسوم داخل دائرة نصف قطرها معلوم ثم إذا كان محيط منتظم يساوى محيط مضلع منتظم آخر ذى عشرة أضلاع فالمطلوب اثبات أن النسبة بين مساحتهما كنسبة  $2 : \sqrt{5}$

(١٢٤) المطلوب معرفة عدد الجالونات التى يحتوى عليها وعاء اسطوانى قطره  $6$  أقدام وارتفاعه  $7$  أقدام مع العلم بأن الجالون يساوى  $277.27$  بوصة مكعبة وباعتبار أن  $\pi = \frac{22}{7}$

(١٢٥) حول  $3$  أسيال و  $7$  فارلونج و  $12$  قصبة انكليزية إلى أمتار

(١٢٦) قطعة أرض مسورة مستطيلة مساحتها نصف فدان مصرى ومحيطها  $200$  مترا والمطلوب إيجاد طول كل ضلع من أضلاعها

(١٢٧) صندوق من خشب أوجهه مستطيلات يسع بالضبط ٦ كرات حديدية قطر كل منها ٠,٢٥ متر موضوعة في النشارة في صفين وسمك الخشب ٠,٢٥ متر والمطلوب إيجاد وزن الصندوق بما فيه مع العلم بأن المتر المكعب من الخشب أو النشارة وزن ٦١٥ كيلوجراما والمتر المكعب من الحديد وزن ٧٨٠٠ كيلوجرام

(١٢٨) المطلوب إيجاد قطر خزان غاز على شكل أسطوانة يسع ٣٠٠,٠٠٠ متر مكعب من الغاز بفرض أن الارتفاع يساوى القطر والمطلوب إيجاد الوزن بالطن للألواح الحديدية اللازمة لبناء هذا الخزان اذا كان القدم المربع منها وزن ١٠ كيلوجرامات بفرض أن القاعدة السفلى ستبقى مفتوحة والقاعدة العليا مسدودة ومستوية

(١٢٩) المطلوب إيجاد مكعب جسر بالأمتار المكعبة قاعدته أفقية مستطيلة طولها ٢٠ مترا وعرضها ٦ أمتار وأوجه الجسر الأربعة صاعدة بميل الى أن تتقابل وزوايا ميل تلك الأوجه على الأفق تساوى ٤٠°

(١٣٠) اذا فرض أنه قد ضم الى قطعة أرض مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠ مترا قطعتان مستديرتان في الطرفين مركز كل منهما هي نقطة تقاطع قطري المربع فما مسطح تلك الأرض المضافة

(١٣١) عوامة مكوّنة من أسطوانة مجوّفة طولها ٦ أمتار ونهاياتها انصاف كرات مجوّفة مصنوعة من معدن سمكه ٣ ملليمترات وقطرها الخارج مترواحد والمطلوب إيجاد ثقلها مع العلم بأن ثقل المتر المكعب من المعدن ٧٨٠٠ كيلوجرام

(١٣٢) اناء على شكل أسطوانة مجوّفة مفتوحة من أعلى وارتفاعها ضعف قطرها موضوعة على سطح أفقي ومملوءة بالماء ثم أخذ مخروط مساو

للاناء في القاعدة والارتفاع وأدخل في الماء الى أن وصل رأسه الى قاعدة الاناء ثم أخرج المطلوب إيجاد ارتفاع الماء في الأسطوانة بعد ذلك

(١٣٣) اذا أخذت كرة قطرها قريب جدا من قطر الأسطوانة المذكورة في المسألة السابقة وأدخلت بعد ما سبق ذكره في الاناء وحفظت بحيث تبقى مغمورة غمرا تاما فالمطلوب إيجاد الارتفاع الذي يصل اليه الماء حين غمرها

(١٣٤) المطلوب وضع قانون لحساب السطح المنحني لكرة والسطح المنحني لأسطوانة مستديرة قائمة والسطح المنحني لمخروط مستدير قائم

(١٣٥) ما عدد الأمتار المربعة من القماش اللازم لإنشاء خيمة مخروطية الشكل ارتفاعها ٣ أمتار بحيث يتيسر للرجل الذي يبلغ طول قامته ١,٨٣ مترا أن يقف معتدل القامة في دائرة نصف قطرها ٠,٦٠ متر من المركز

(١٣٦) اناء سعته بنت على شكل مخروط دائري ناقص ارتفاعه من الداخل  $\frac{1}{4}$  بوصات وقطر قاعدته كذلك  $\frac{1}{4}$  بوصات والمطلوب إيجاد قطر القاعدة العليا بفرض أن الجالون من الماء يزن ١٠ أرطال والقدم المكعب من الماء يزن ١٠٠٠ أوقية ثم المطلوب أيضا إيجاد ابعاد اناء سعته كوارت وشكاه مشابه للشكل السابق

(١٣٧) معلوم من الشكل الرابعي أ ب ح د طول أ ب = ١٨٤٠ مترا  
 ب ح = ٢٤٢٠ مترا والزوايا ب أ ح و أ ح د قائمتان ومساحة الشكل تعادل ٩٧٢ فدانا مصرياً فما مقدار البعدين ح د و د ب

(١٣٨) دائرة مرسومة على مستقيم منتظم ومستقيم آخر مرسوم على الدائرة والفرق بين مساحة المستمين تساوى ٨ ٣٧٢ سنتيمترات مربعة والمطلوب إيجاد مساحة الدائرة

(١٣٩) قطع ناقص مساحته تساوى ط  $\times ٢٢,٨٢٧$  سنتيمترا ومحوره الأكبر يساوى ١٤ سنتيمترا فما طول محوره الأصغر

(١٤٠) المحيط الخارج لحلقة دائرية يزيد خمسة سنتيمترات عن المحيط الداخلى لها فاذا كان نصف القطر الداخلى يساوى ٧ سنتيمترات فما المساحة المحصورة بين المحيطين

(١٤١) قطعة مكعبة من الحجر ضلعها ١٢ سنتيمترا موضوعة على الأرض وفوقها اسطوانة قاعدتها تمس الأضلاع الأربعة للوجه العلوى للمكعب وارتفاع الاسطوانة المذكورة يساوى ١٧,٥ سنتيمترا وجميع السطح مصقول ما عدا الأجزاء غير المنظورة فما مساحة السطح المصقول

(١٤٢) كتلة من الحديد زنتها ٧ طونولات يراد سحبها سلكا قطاعه العرضى ١,٦٥ سنتيمتر مربع فما طول ذلك السلك اذا كان الديسيمتر المكعب من الحديد وزن ٧,٨ كيلوجرامات

(١٤٣) اذا كانت مساحة السطح الخارجى لقنبلة كروية يساوى ٢٢٧٥ سنتيمترا مربعا ومساحة سطحها الداخلى تساوى ٩٦٢ سنتيمترا مربعا فما حجم تلك القنبلة وما سمكها

(١٤٤) منشور قائم ارتفاعه ٢٠ سنتيمترا يرتكز على قاعدة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ضلعه ٠,٧٥ مترا فما حجم هذا المنشور

(١٤٥) المطلوب تحويل ١٣٩٢,٧ قدما مربعا الى أمتار مربعة بحيث يشتمل الخارج على أربعة أقدام

(١٤٦) قطعة أرض مربعة طول ضلعها ٢٠٠ مترا داخلها طريق مستدير قطره يساوى ضلع المربع ومساحته ٥٩٦٦ مترا مربعا فما عرض الطريق المذكور

(١٤٧) حوض على شكل نصف كرة قطره الداخل ٢٥ سنتيمترا مغطى من الداخل بطبقة من الشمع ذات سمك منتظم بحيث أنه اذا صب فيه ماء حار حرارة كافية لازابة الشمع ولله الحوض فان الشمع يعود بطبقة سمكها منتظم ويساوى ٠,٢٥ متر والمطلوب ايجاد السمك الأصلي لطبقة الشمع

(١٤٨) حوض على شكل منشور قاعدته مثلثان متساويا الأضلاع وطول وعرض القاعدة من أعلى يساويان ٣٠ سنتيمترا وخمسة سنتيمترات على التناظر والمطلوب ايجاد حجم مافيه من الماء

(١٤٩) مخروط ناقص قطر قاعدتيه ٥ سنتيمترات و ٢ سنتيمتر ويشتمل على كرة تمس قاعدتي المخروط وسطحه الداخل فما حجم هذا المخروط الناقص

(١٥٠) قطعة أرض على شكل مثلث متساوي الأضلاع كسيت بالرخام بسعر المتر المربع الواحد ٦٥٠ مليا وأنشئ حولها سور بسعر المتر الطولى ٣٦٥ مليا وفرض أن نفقة الرخام ستة أمثال نفقة السور فما طول ضلع المثلث

(١٥١) حوض طوله ١,٦٠ متر وعرضه ٠,٩٥ متر ملئ بالماء الى ارتفاع قدره ٠,١٨ متر فما ارتفاع كمية من الماء مساوية لهذا الماء فى اسطوانة نصف قطرها ٠,٤٥ متر

(١٥٢) مخروط مجوف مصنوع من الصلب نصفاً قطري قاعدتيه الخارجة والداخله هما ١٠ سنتيمترات و ٧,٥ سنتيمترات على التناظر وارتفاع الرأس من الداخل ١٧,٥ سنتيمترا فاذا ملئ المخروط بالرصاص الى ارتفاع أوطى من الرأس بقدر ٠,١٠ متر وملئ الباقي بالبارود فالمطلوب ايجاد ثقل الصلب والرصاص والبارود اذا كان ثقل ٤ سنتيمترات مكعبة من الصلب يساوى سنتيمترين مكعبين من الرصاص تساوى ٣٠ سنتيمترا مكعبا من البارود وثقله الصلب ٧,٨

(١٦٣) المطلوب إيجاد القطر التقريبي لكرة من الخشب حجمها يساوى حجم شجرة خشبها من نوع الخشب نفسه وطولها ٥,٢٠ أمتار ومحيطها فى المواضع المختلفة بما فيها الطرفان وعلى مسافات متساوية يساوى ٢,٩٠ متر ٢,٥٠ متر ٢,٠٠ متر ١,٥٠ متر ١,٢٠ متر على التناظر

(١٥٤) رسم مسدس منتظم فى دائرة معلومة ثم رسم فى ذلك المسدس دائرة ثم فى الدائرة مسدس وهكذا الى غير نهاية والمطلوب إيجاد المتسلسلة التى تعين المسامخ المحصورة بين كل دائرة ومسدس وبيان أن مجموعها قريب من مساحة الدائرة السابقة

(١٥٥) كرة من الرصاص قطرها ١٠,٠ متر مغطاة بالذهب والمطلوب إيجاد سمك طبقة الذهب (١) اذا كان حجم الذهب يساوى حجم الرصاص (٢) اذا كان سطح الذهب ضعف سطح الرصاص

(١٥٦) اذا قسم مخروط قائم ذو قاعدة مستديرة الى ثلاثة أجزاء بمستويين موازيين لقاعدته متساويى البعد عن القاعدة والرأس فالمطلوب مقارنة الأجزاء الثلاثة التى انقسم اليها المخروط

(١٥٧) اذا كان عندنا ست أنابيب من الحديد وكان القطاع العرضى لآى واحدة منها مربعاً وكوّن منها حلقة على شكل مسدس وملئت ماء وكانت مساحة القطاع العرضى للماء ١٠٠ سنتيمتر مربع والبعد بين كل زاويتين داخليتين متقابلتين يساوى متراً واحداً فالمطلوب إيجاد مساحة السطح الكلى للواسير وحجمها الكلى بصرف النظر عن سمك المواسير

(١٥٨) برج اسطوانى قطره ثمانية أمتار وارتفاعه عشرة أمتار مغطى بطبقة كروية مقطوع منها جزء من أعلاها وبني فوق الفتحة التى فى القبة منور قطره ٢,٩٠ متر وارتفاعه ٣ أمتار ثم غطيت بسطح مستو فالمطلوب إيجاد السطح الكلى الخارجى للبنى

(١٥٩) قرص من الورق المقوى قطره متر واحد قسم الى ستة قطاعات متساوية بخطوط مارة بالمركز ورسم في كل قطاع دائرة تمس نصفى القطرين المحددين للقطاع وتمس أيضا قوس الدائرة المار بنهايتى نصفى القطرين في وسط القوس المذكور— فاذا قطعت تلك الدوائر وحذفت من القطاعات فالمطلوب ايجاد مساحة الباقي من المقوى

(١٦٠) مخروط مجوف من الورق زاوية رأسه ٩٠° أمسك بحيث تكون رأسه الى أسفل ووضعته فيه كرة نصف قطرها ٠.٥ متر ثم قطع جزء المخروط المتباعد عن الرأس من محل تماس الورق بالكرة والمطلوب ايجاد سطح الجسم الباقي بعد ذلك

(١٦١) منشور قائم مجوف موضوع على قاعدة مكونة من مثلث متساوى الأضلاع والأوجه الرأسية للمنشور عبارة عن مربعات فاذا كان ضلع كل مربع يساوى مترا واحدا شمل على المخروط بالماء وغمر فيه أكبر كرة يمكن غمرها فيه فالمطلوب ايجاد مقدار الماء الباقي فى المنشور

(١٦٢) صالة طولها ثلاثة أمثال عرضها وتكاليف بياض سقفها هى ٥٠٠ مللما و ٤ جنيهات بفرض أن قيمة بياض المتر الواحد ٢٥ مللما ونفقة الصاق الورق على حوائطها الأربع تبلغ ٣٥ جنيها بفرض أن المتر المسطح يتكلف ٩٥ مللما والمطلوب ايجاد ارتفاع الصالة

(١٦٣) مكعب من الرخام ضلعه يساوى مترا واحدا شطفت زواياه وصقلت جيدا بحيث يكون كل وجه جديد على شكل مثلث متساوى الأضلاع بينما صارت الأوجه الأصلية للمكعب مربعات ثانياً والمطلوب ايجاد مساحة الجسم الباقي بالتقريب

(١٦٤) اناء على شكل نصف كرة نصف قطره الداخلى متر واحد ملئ ماء ووضع على تختة أفقية ثم وضع فيه مخروط وضعاً رأسياً بحيث تكون رأس المخروط مماسة لمركز قاعدة الاناء فاذا كانت زاوية رأس المخروط تساوى ٩٠° فالمطلوب إيجاد مقدار الماء الباقي فى الاناء بعد ادخال المخروط الى وضعه الجديد

(١٦٥) اذا كان محيط مثلث قائم الزاوية يساوى ١٥ متراً وكان الوتر يزيد عن أحد الأضلاع بقدر ٢٫٥ متراً فالمطلوب إيجاد الأضلاع الثلاثة

(١٦٦) المطلوب إيجاد مساحة قطعة أرض مثلثة الشكل  $ABC$  اذا كانت قد قيست الأبعاد الآتية على خريطة مقياسها  $\frac{1}{4000}$  فوجد  $AB = ٤$  سنتيمترات والعمود من  $B$  على الخط  $AC = ١٫٥٩$  سنتيمتر والمطلوب أيضاً إيجاد المساحة بقياس الأضلاع الثلاثة اذا كان  $AB = ٣٫٣$  سنتيمترات  $BC = ٢$  سنتيمتر ثم بيان المتوسط بين المساحتين بالفدان

(١٦٧) بئر قطرها ١٫٥٠ متر وعمقها ١٠ أمتار يراد بناؤها بطوب متلاصق بغير مونة بسمك ٠٫٢٢٥ متر فما هو الثقل التقريبي للطوب اللازم اذا كان ثقل الطوبة التى مقياسها ٠٫٢٢٥ متر  $\times$  ٠٫١١ متر  $\times$  ٠٫٠٥ متر يساوى ٣ كيلو جرام

(١٦٨) قنبلة مجوفة قطرها ٣٠ سنتيمترا وضعت فى اناء مخروطى زاوية رأسية ٩٠° وصب ماء الى أن ملاءها وغطاها ثم فرغت تلك الكرة مما فيها من الماء وأخرجت من الاناء ووضع عوضاً عنها كرة أخرى مصمتة مساوية لها فى القطر فارتفع الماء بقدر ٠٫١٢٥ متر فوقها والمطلوب حساب سمك الكرة المجوفة بالتقريب



(١٦٩) المطلوب عمل رسم كروكي وحساب مساحة قطعة أرض شكلها  
ب ع ح ف د ح مع معرفة ما يأتي

	مترا	
	الى ح	
	٢٠٤	
	١٩٨	الى ف ٩٤
١٠ الى ع	١٢٢	
	١١٧	الى د ٦٤
	٨٨	الى ح ١٤
٧٠ الى ب	٦٣	
	من ا	

(١٧٠) هرم ناقص قاعدته مستطيلتان ضلعا قاعدته ٢٥ مترا و ٣٦ مترا  
فاذا كان ارتفاع الهرم الناقص المذكور ٦٠ مترا وحجمه ٥٠٤٨٠ مترا مكعبا  
فالمطلوب إيجاد مساحة قاعدته الأخرى

(١٧١) المطلوب إيجاد نصف قطر الكرة التي حجمها يساوي حجم الهرم  
الناقص السابق الذكر بحيث يشتمل الناتج على رقمين أعشاريين مضبوطين.

(١٧٢) المطلوب إيجاد ثمن القماش اللازم لعمل خيمة مخروطية قطرها  
٣,٦٠ أمتار وارتفاعها ٢,٤٠ مترا إذا كان ثمن المتر الواحد ١٨٥ مليا  
وعرض القماش ٠,٦٠ متر

(١٧٣) حديقة عمومية مساحتها فدانان وهي على شكل مربع فاذا كان  
فيها طريق يحيط بها من الداخل ومساحته  $\frac{1}{8}$  فدان فما عرضه

(١٧٤) صندوق على شكل مكعب عمقه ١,٥٠ متر ملئ بطبقات من الكرات قطر كل منها ٠,١٢٥ متر بحيث تكون أقطار تماس تلك الكرات أفقية ورأسية في مقدار حجم الجزء الخالي من الصندوق بين تلك الكرات

(١٧٥) مسجد مشتمل على منارتين وقبة وكل منارة يتكوّن جزؤها الأعلى من هرم ارتفاعه ٢٠ مترا موضوع على قاعدة مربعة ضلعها ٦ أمتار والقبة على شكل نصف كرة نصف قطرها ١٢ مترا والمطلوب إيجاد نفقة دهان ذلك بالزيت اذا كان المتر المسطح الواحد يتكلف ٤٠ مليا

(١٧٦) قطعة العملة الانكليزية المعروفة بنصف بنس قطرها بوصة واحدة في مقدار المساحة المحدودة بست قطع من هذه العملة اذا وضعت بحيث تمس كل قطعة قطعتين وبحيث تكون مراكرها جميعا على محيط دائرة

(١٧٧) قرص مستدير من الزصاص سمكه ٠,٧٥ متر وقطره ٠,٣٠ مترا صنع جميعه خردقا متماثل الكثافة نصف قطره = ١,٢٥ ملليمتر فما عدد الخردق الذي صنع

(١٧٨) اذا كانت صالة في مبنى على شكل اسطوانى نصف قطرها ٥ أمتار وارتفاعها ٣,٦٠ أمتار ثم غطيت بجروط زاوية رأسه زاوية قائمة فالمطلوب إيجاد مساحة السطح الداخلى ثم الحجم المحصور فى المبنى المذكور

(١٧٩) ان قاعدة الهرم الأكبر بالجيزة مربع ضلعه ٢٣٠ مترا تقريبا وارتفاعه ١٤٠ مترا والمطلوب (أولا) حساب ثقله اذا كان ثقل المتر المكعب منه ٣ طونولات (ثانيا) طول الحائط التى يمكن بناؤها من مادة هذا الهرم اذا كان ارتفاعها ١,٥٠ مترو سمكها ٠,٤٥ متر

(١٨٠) كرة نصف قطرها ١٥٠ متر تقبث ثقباً مخروطياً رأسه في مركز الكرة فإذا كانت قاعدة الثقب تحذف من سطح الكرة ٣١٢٠٠ متر مربع فما حجم ما يبقى من الكرة

(١٨١) مثلث متساوي الأضلاع مساحته ١٧٣٢٠٥ متر مربع جعلت رؤوسه مراكز ورسمت دوائر أنصاف أقطارها مساوية لأنصاف أضلاع المثلث فالمطلوب إيجاد المساحة المحصورة بين الدوائر الثلاث

(١٨٢) مخروط مجزوف طول رأسه ضعف نصف قعره قاعدته وضع بحيث يكون محوره رأسياً ورأسه إلى أسفل وملئ مائاً تاماً بالماء ثم أخذت كرة كثافتها أكبر من كثافة الماء وأدخلت فيه تدريجياً فوجد أنها عندما تستقر على الأضلاع الداخلة للمخروط تكون قد غمرت في الماء غمراً تاماً فقط والمطلوب إيجاد كمية الماء التي تربطها الكرة ثم إيجاد المقدار المحصور بين الكرة ورأس المخروط بفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط تساوى ٠٥٠ متر

(١٨٣) منشور قائم قاعدته مثلث وكل ضلع من أضلاعه يساوى ٥٣ متر رسمت داخله كرة فمست كل وجه من أوجه الخمسة والمطلوب إيجاد حجم الكرة ومقدار الفضاء الواقع بينها وبين أوجه المنشور

(١٨٤) المطلوب حساب تكاليف تبليط ميدان مستدير قطره ٢٥ متر بفرض أن قيمة تبليط المتر المربع مائاً مائاً مائاً وبفرض ترك فضاء في مركز الميدان لإنشاء فسقية على شكل مستدس منتظم طول كل ضلع من أضلاعه متر واحد

(١٨٥) المطلوب البرهنة على أن مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب مجموع الضلعين المتوازيين في طول العمود عليهما المحصور بينهما.

(١٨٦) حقل على شكل شبه منحرف مساحته  $\frac{1}{4}$  ع أفدنة والمسافة بين الخطين المتوازيين مقيسة على الخط العمودى عليهما تساوى ١٢٠ مترا وأحد الضلعين المتوازيين يساوى ٢٠٠ مترا طول الضلع الثانى

(١٨٧) المطلوب بيان حجم المخروط بدلالة نصف قطر قاعدته وارتفاعه

(١٨٨) اذا كان قطرا قاعدتى مخروط ناقص ١٥,٠ متر ١٠,٦ متر وكان حجم هذا المخروط الناقص يساوى ٣١٣٥ سنتيمترا مكعبا فالمطلوب إيجاد ارتفاع المخروط

(١٨٩) حقل مخمس ا ب ح د هـ الطول ا ح يساوى ٥٠ مترا والأعمدة من ب د هـ على ا ح تساوى ١٠,٦ ٢٠,٦ مترا والبعد بين نقطة ا وبين مواقع الأعمدة من د هـ تساوى ٤٠ مترا ١٠,٦ أمتار المطلوب إيجاد المساحة

(١٩٠) كرة نصف قطرها مترواحد موضوعة على طاولة فالمطلوب إيجاد حجم المخروط القائم المجوف الذى يمكن أن يغطيها بالضبط بفرض أن قطاع هذا المخروط الماز بحوره مثلث متساوى الأضلاع

(١٩١) المطلوب إيجاد مساحة المثلث الذى أضلاعه ١٣,٦ مترا ١٥,٠ ١٥,٦ مترا

(١٩٢) المطلوب أيضا إيجاد طول أحد الضلعين المتساويين من مثلث متساوى الساقين اذا كانت قاعدته ١٤ مترا ومساحته مساوية لمساحة المثلث المذكور فى المسألة السابقة (مقربا لغاية جزء من المليمتر)

(١٩٣) غرفة مستديرة مغطاة بسقف على شكل قبة نصف كروية مكعب فراغها ١٥٧,٠٨ مترا مكعبا والقطر الداخلى للبناء مساو لارتفاع تاج القبة فوق الأرضية والمطلوب إيجاد الارتفاع

(١٩٤) ماسورتان احدهما من الرصاص والثانية من الزنك طولهما على التناظر ١,٢٥ ١,٥٦٦ متروهما متساويتان في القطر الداخل وقدره ٠,٢٥ متر والقطر الخارج للاسورة الرصاصية يساوى ٠,٣ متر فاذا كان الرصاص أثقل من الماء بقدر ١١ مرة والزنك أثقل منه ٧ مرات فما هو مقدار القطر الخارج للاسورة الزنك اذا كان ثقل الماسورتين واحدا

(١٩٥) اذا فرض أن قطرة من الماعذات شكل كروي قطره ٠,٢٥ متر فما هو الارتفاع الذى تصل اليه ٥٠٠ نقطة في اناء مخروطى قطر قاعدته يساوى ارتفاعه

(١٩٦) مكعب من الرصاص حجمه ٠,٢٧ متر مكعب أخذ منه هرم قاعدته هي أحد أوجه المكعب ورأسه على الوجه المقابل فاذا أذيب الباقي من الرصاص وصب على شكل كرة فما قطر تلك الكرة

(١٩٧) المطالب ايجاد نفقة رصف طريق طوله ٨٠٠ متر وعرضه ١٥ مترا اذا كانت قيمة رصف المتر المربع الواحد ٤٥٠ مليا

(١٩٨) ترعة عرض قاعها ٤٠ مترا وعمقها ١٠,٥٠ أمتار وميل أجنابها ٤٥° فما هي النفقة الكلية لحفر مسافة طولها ١٠٠ متر بفرض أن نفقة حفر المتر الواحد تساوى ٧٥ مليا

(١٩٩) اذا فرض في المسألة السابقة أن نفقة رصف الأجناب بالحجر تبلغ ١١٠ مليات للمتر المربع فما هي المصاريف الاضافية بفرض أن الرصف يصل الى ارتفاع رأسى قدره ٨,١٠ أمتار

(٢٠٠) حوض مفتوح من أعلاه طوله ٦,١٥ أمتار وعرضه ٢,٢٠ مترا وعمقه ١,١٠ متر والمطلوب (١) ايجاد مسطح الرصاص اللازم لتبطينه تبطينا تاما (بصرف النظر عن الأجزاء التى تغطيها أجزاء أخرى) ٦ (٢) مقدار سعته بالليتر .

(٢٠١) ماسورة من الحديد الزهر قطرها الداخل ٠,١٥ متر وسمك المعدن ٠,٢٥ متر والمطلوب حساب سطح المعدن الداخل في القطاع العرضي للماسورة وثقل المتر الطولى منها

(٢٠٢) المطلوب حساب ثقل محور حركة آلة ميكانيكية مصنوع من الصلب اللين قطره ٠,٠٧٥ متر وطوله ٣ أمتار

(٢٠٣) اذا بطنت أسطوانة ببطانة من الصلب المصبوب وكان القطر الداخل ١,٠٥ متر والطول ١,٣٥ متر والسمك ٠,٣٣ متر فما ثقل تلك البطانة

(٢٠٤) ما نفقة دهان عقد نصف دائرى فتحتة ٦ أمتار وطوله ٣,٦٠ أمتار وقيمة دهان المتر المربع الواحد ٩٠ مليا

(٢٠٥) ما حجم الماء في ماسورة طولها ٨٠٠ متر وقطرها ٠,٢٢ متر

(٢٠٦) صمام أمن مغلق بأثقال من الزهر صدها سبعة قطر كل منها ٠,٢٥ متر وسمكه ٠,٣٧٥ متر والمطلوب إيجاد الثقل الواقع على الصمام

(٢٠٧) اذا كان قطر صمام الأمن في المسألة السابقة ٦,٢٥ سنتيمترات فما مقدار ضغط البخار على كل سنتيمتر مربع حينما يشرع البخار في التصرف

(٢٠٨) صمام أمن في قران يشتغل على ضغط قدره ٧ كيلو جرامات على السنتيمتر المربع وقطر الصمام المذكور ٠,١٠ متر والمطلوب حساب الثقل اللازم لهذا الصمام ثم سمك الأثقال المصنوعة من الحديد الزهر التى قطر كل منها ٠,٣٠ متر وعددها عشرة لكى يكون ثقلها هو الثقل المطلوب

(٢٠٩) ما ثقل قران أسطوانى من الصلب نهايتاه نصفاه كرتين وقطره ٠,٩٠ متر وطوله ٦ أمتار وسمك الصاج الذى هو مصنوع منه ٠,١٠ متر

(٢١٠) ما حجم الماء الذى يلاء القزان المذكور وما ثقل ذلك الماء

(٢١١) طيارة آلة بخارية مصنوعة من حديد زهر عرض دائرها ٢٢٥ متر والسلك المتوسط لذلك المحيط ٠,٣٧٥ متر فما هو ثقل محيطها اذا كان قطرها ١,٥٠ متر

(٢١٢) ما ثقل حافة مصنوعة من حديد مطروق مستدير قطره ٠,٢٥ متر والقطر المتوسط للحلقة يساوى ١,١٥ متر

(٢١٣) صمام أمن قطره = ٠,٥ متر يحمل بثمان أقراص من الحديد الزهر قطر كل منها ٠,٣٠ متر وسمكها ٠,٣٧٥ متر والمطلوب إيجاد ضغط البخار على السنتيمتر المربع الواحد من الصمام

(٢١٤) قضيب مستدير من الحديد قطره = ٠,٣٧٥ متر وقضيب آخر مجوف يساويه فى الثقل والطول قطره الخارج ٠,٥ متر فما هو القطر الداخلى له

(٢١٥) بدالة طولها ٢٤٠ مترا وعرضها الداخلى ٦ أمتار وعمق الماء فيها ١,٨٠ متر فما ثقل الماء المشتملة هى طيه

(٢١٦) اذا كانت البدالة السابقة مبطنة جوانبها وقاعها بالواح من الصلب سمكها ٠,١٠ متر وارتفاع الصاج فى الأجناب ٢,١٠ متر فما ثقل تلك الألواح بصرف النظر عما فى طرفى البدالة وعن جميع أجزاء المعدن التى يغطيها أجزاء أخرى

(٢١٧) اذا أريد إنشاء كرة مجوفة من الحديد الزهر قطرها الخارج ٦٠ متر وسمكها يجعلها تعوم بالضبط فى الماء أى يكون ثقلها مساويا لثقل كرة من الماء قطرها ٦٠ متر فما سمك المعدن

(٢١٨) سلسلة من حلقات من الحديد المطروق المستدير الذي قطره ٠,٢٥ متر وجانبها كل حلقة منها متوازيان في طول قدره خمسة سنتيمترات ثم يجمعان بنصفي حلقتين دائريتين نصف قطرها الداخلي يساوى ٠,٣٢ متر فثقل كل حلقة

(٢١٩) المطلوب إيجاد ثقل عتب من الحديد المطروق على شكل  $\Gamma$  اذا كانت سمك الرأس ٠,٢٥ متر وعرضها ٠,١٢٥ متر وارتفاع الروح ٠,١٢٥ متر وسمكه يختلف من ٠,٢٥ متر عند الرأس الى ١٩ ملليمتر عند النهاية الأخرى وطول العتب يساوى ٣ أمتار

(٢٢٠) اذا كان القطر المتوسط لدائر طيارة آلة بخارية يساوى ١,٨٠ متر وعرضه ٠,٣٠ متر وسمكه ٠,٠٤٤ متر فثقل ذلك الدائر اذا كان مصنوعا من الحديد الزهر

(٢٢١) اذا فرض في المسألة السابقة أن الأذرعة مستطيلة وقطاعها ٠,٠٧٥ × ٠,٣٧٥ متر وعددها ستة وأن قطر الركبة ٠,٢٢٥ متر وأن قطر محور الحركة ٠,١٠ متر فالمطلوب حساب الثقل الكلى للطيارة

تم الكتاب بعون الله

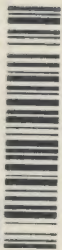








Bibliotheca Alexandrina



0415098